

Daniela Popescu

MECANICA FLUIDELOR. BAZELE TEORETICE

FLUID MECHANICS

THEORETICAL BASICS

This book is a presentation of the basic principles used in Fluid Mechanic. It is the author's aim to present the concepts in such a way, that the students will have an appropriate image of the various types of flow problems taken under consideration.

The text builds upon mathematical foundation and every effort has been made to explain the significance of the mathematical equations. In order to offer examples for the using of theoretical knowledge, typical engineering application are included.

The book appeals to the students from Power Engineering Department, but also from Mechanical and Civil Engineering Departments.

CONTENTS

- 1. Fluid Properties**
- 2. Basic Principles**
- 3. Fluid Statics**
- 4. Fluid Cinematics**
- 5. Ideal-fluid Flow**
- 6. Laminar Flow**
- 7. Turbulent Flow**

DANIELA POPESCU

MECANICA FLUIDELOR

BAZELE TEORETICE

Editura CERMI

2004

Referenți științifici

Valeriu PANAITESCU

Profesor doctor inginer la
Universitatea "POLITEHNICA" București
Facultatea de Energetică

Eugen Constantin ISBĂȘOIU

Profesor doctor inginer la
Universitatea "POLITEHNICA" București
Facultatea de Energetică

Tehnoredactare computerizată

Daniela Popescu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
POPESCU, DANIELA

Mecanica fluidelor: bazele teoretice / Daniela
Popescu. - Iași: Cermi, 2004.

Bibliogr.

ISBN 973-667-039-2

532 (075.8)



CERMI IASI

EDITURA TEHNICA; ȘTIINȚIFICĂ ȘI DIDACTICĂ

Str. Cărelari Nr.16, Tel.:0723136640, 0722265024, Tel/Fax:0232316604,
e-mail: cermi@Xnet.ro, <http://www.cermi.ebony.ro>

Accreditată de Ministerul Culturii și Cultelor cu avizul Nr.3713 din 13
iunie 1995 și recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice
din Învățământul Superior (C.N.C.S.I.S.)

Membra a Asociației Editorilor din România (AER) și a Asociației
Publicațiilor Literare și Editurilor din România (APLER)

© Copyright 2003. Toate drepturile asupra prezentei ediții
apartin autorului.

Cuvânt înainte

Această lucrare este gândită să apară în două volume și are la bază cursurile pe care autoarea le-a predat studenților energeticieni ai Universității Tehnice “Gh. Asachi” Iași între anii 1995-2003. Primul volum este consacrat principiilor de bază ale mecanicii fluidelor. Cel de al doilea volum va fi dedicat aplicațiilor tehnice ale mecanicii fluidelor în instalațiile și sistemele întâlnite în energetică.

Lucrarea este structurată pe șapte capitole. În capitolul 1 sunt prezentate principalele proprietăți fizice ale fluidelor. Capitolul 2 este consacrat principiilor generale ale mecanicii fluidelor. Statica fluidelor este expusă în capitolul 3, iar în capitolul 4 este studiată cinematica fluidelor. În capitolul 5 este prezentată dinamica fluidelor nevâscoase, iar capitolul 6 tratează dinamica fluidelor vâscoase în regim laminar. În capitolul 7 se tratează mișcarea turbulentă. Expunerea teoretică este completată de aplicații tehnice.

Lucrarea se adresează în primul rând studenților energeticieni, dar este utilă și celor de la facultățile de mecanică sau de instalații. Alături de temele de bază sunt prezentate și chestiuni de nivel mai ridicat, cartea fiind astfel utilă și specialiștilor care doresc să aprofundeze mecanica fluidelor.

Autoarea își exprimă întreaga gratitudine față de domnul profesor universitar doctor inginer Valeriu Panaitescu pentru minuțiozitatea cu care a citit manuscrisul, pentru sugestiile pertinente care au condus la îmbunătățirea considerabilă a materialului. Adresez cele mai calde mulțumiri domnului profesor universitar doctor inginer Eugen Constantin Isbășoiu pentru atenția cu care a urmărit acest demers și pentru sfaturile utile pe care mi l-a acordat. De asemenea, aduc un respectuos omagiu regretatului profesor doctor inginer Paul Matei care a contribuit la formarea mea profesională.

Daniela Popescu

CUPRINS

Introducere.....	9
 Capitolul 1. PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR	 12
1.1. Ipoteza continuității mediului fluid.....	13
1.2. Proprietăți fizice ale fluidelor.....	14
1.2.1. Temperatura.....	14
1.2.2. Masa volumică (masa specifică sau densitatea), volumul masic, greutatea volumică.....	15
1.2.3. Ecuația de stare a gazelor.....	16
1.2.4. Compresibilitatea și elasticitatea.....	17
1.2.5. Aderarea la suprafețe solide.....	19
1.2.6. Viscositatea.....	19
1.2.7. Conducția termică.....	23
1.2.8. Difuzia masică.....	24
1.2.9. Tensiunea superficială.....	25
1.2.10. Fenomene capilare.....	27
1.2.11. Absorbția și degajarea gazelor.....	28
1.2.12. Cavitația.....	28
 Capitolul 2. PRINCIPIILE GENERALE ALE MECANICII FLUIDELOR	 30
2.1. Forțe și tensiuni în fluide.....	30
2.2. Principiile generale ale mecanicii aplicate unui corp fluid.....	33
2.3. Tensorul tensiunilor.....	36
2.4. Simetria tensorului tensiunilor.....	40
2.5. Presiunea statică.....	43
2.6. Ecuațiile lui Cauchy.....	44
2.7. Metode de reprezentare ale mișcării: metoda lui Lagrange și metoda lui Euler.....	46
2.8. Deformarea particulei fluide.....	49
2.8.1. Determinarea câmpului vitezelor.....	49
2.8.2. Teorema lui Cauchy și Helmholtz.....	53
2.9. Ecuația constitutivă.....	54
2.10. Modele de fluid.....	57

Capitolul 3. STATICA FLUIDELOR	59
3.1. Ecuatiile lui Euler pentru statica fluidelor.....	59
3.2. Relația fundamentală a staticii fluidelor și formele sale.....	61
3.3. Consecințe ale relației fundamentale a staticii fluidelor.....	64
3.4. Statica fluidelor în câmpul gravitațional.....	67
3.4.1. Relația fundamentală a staticii fluidelor în câmpul gravitațional.....	67
3.4.2. Relația fundamentală a hidrostatiei.....	68
3.5. Repausul relativ al lichidelor în câmpul gravitațional.....	72
3.6. Aparate de măsurare a presiunii bazate pe principiile staticii fluidelor.....	79
3.7. Teorema acțiunii fluidelor în repaus pe pereți solizi.....	85
3.7.1. Forțe de presiune pe suprafețe plane.....	86
3.7.2. Determinarea forței de presiune și a centrului de presiune cu ajutorul epurei de presiune.....	97
3.7.3. Forțe de presiune pe suprafețe curbe deschise.....	100
3.7.4. Principiul lui Arhimede.....	107
3.7.5. Plutirea corpurilor.....	108
Capitolul 4. CINEMATICA FLUIDELOR	110
4.1. Noțiuni de cinematica fluidelor.....	110
4.2. Teorema lui Lagrange-Cauchy și teoremele lui Helmholtz pentru mișcări rotaționale.....	118
4.3. Ecuția continuității.....	122
4.3.1. Derivata totală, în raport cu timpul, a unei integrale pe un volum în mișcare.....	122
4.3.2. Ecuția continuității în cazul general.....	126
4.3.3. Ecuția continuității pentru un tub de curent.....	129
4.3.4. Ecuția continuității pentru un tub de curent elementar.....	131
4.4. Clasificarea mișcărilor.....	133
Capitolul 5. DINAMICA FLUIDELOR NEVÂSCOASE	135
5.1. Ecuatiile Euler pentru dinamica fluidelor nevâskoase.....	135
5.2. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic.....	140
5.3. Relația Bernoulli pentru fluide nevâskoase.....	149
5.3.1. Ecuatiile de mișcare ale fluidelor nevâskoase sub forma Helmholtz și Gromeka-Lamb.....	149
5.3.2. Deducerea relației lui Bernoulli pentru fluide nevâskoase.....	151
5.3.3. Forme particulare ale relației Bernoulli în câmpul gravitațional.....	153
5.3.4. Reprezentarea grafică și interpretarea energetică a relației lui Bernoulli.....	157
5.4. Aplicații ale relației lui Bernoulli.....	159
5.4.1. Tubul Pitot.....	159
5.4.2. Măsurarea presiunii statice.....	161
5.4.3. Sonda Pitot-Prandtl.....	162

Capitolul 6.	DINAMICA FLUIDELOR VÂSCOASE ÎN REGIM LAMINAR.....	170
6.1.	Clasificarea mișcărilor fluidelor vâskoase.Experiența lui Reynolds.....	170
6.2.	Ecuatiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim laminar.....	172
6.2.1.	Ecuatiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim laminar sub forma Navier – Stokes.....	172
6.2.2.	Condiții inițiale și condiții la limită necesare integrării ecuațiilor.....	176
6.3.	Relația lui Bernoulli pentru fluide vâskoase în regim laminar.....	178
6.3.1.	Ecuatiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim laminar sub formele Helmholtz și Gromeka-Lamb.....	178
6.3.2.	Relația lui Bernoulli în cazul mișcării fluidelor vâskoase în regim laminar.....	179
6.3.3.	Forme particulare ale relației lui Bernoulli.....	180
6.3.4.	Relația lui Bernoulli pentru un tub de curent.....	182
6.3.5.	Reprezentarea grafică și interpretarea energetică a relației lui Bernoulli pentru fluide vâskoase.....	186
6.3.6.	Aplicații ale relației lui Bernoulli pentru fluide vâskoase.....	187
6.4.	Cazuri de integrare exactă a ecuațiilor Navier-Stokes.....	190
6.4.1.	Curgerea permanentă între două plăci plane paralele.....	190
6.4.2.	Mișcarea Hagen Poiseuille.....	195
6.4.3.	Pierderea de sarcină la curgerea laminară într-o conductă circulară (formula lui Darcy).....	199
Capitolul 7.	DINAMICA FLUIDELOR VÂSCOASE ÎN REGIM TURBULENT.....	201
7.1.	Caracteristicile mișcării turbulente.....	201
7.1.1.	Structura mișcării turbulente.....	201
7.1.2.	Analogia lui Bahmetev.....	204
7.2.	Ecuatiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim turbulent.....	205
7.2.1.	Tensiuni suplimentare turbulente aparente.....	205
7.2.2.	Ecuatiile lui Reynolds.....	210
7.3.	Relația lui Bernoulli pentru mișcarea turbulentă.....	212
7.4.	Teoriile semiempirice ale turbulenței.....	215
7.4.1.	Teoria coeficientului de viscozitate turbulentă al lui Boussinesq.....	215
7.4.2.	Teorii privind lungimea de amestec.....	216
7.5.	Repartiția vitezelor medii în vecinătatea unui perete.....	220
Anexa 1.	Proprietăți ale fluidelor	225
Anexa 2.	Ecuatiile de mișcare Navier-Stokes și ecuația de continuitate în coordonate cilindrice.....	227
Bibliografie.....		228

INTRODUCERE

Mecanica fluidelor este o ramură a *Mecanicii mediilor continue* care studiază legile repausului și mișcării fluidelor, precum și interacțiunea lor cu corpurile solide cu care vin în contact.

Mediile continue se diferențiază după modul în care se deformează sub acțiunea forțelor exterioare. *Fluidul* este o substanță fără rigiditate, care opune o rezistență neglijabilă la deformare sub acțiunea forțelor tangențiale externe și nu revine la forma inițială după ce aceste forțe au fost îndepărtate. Prin comparație, solidele sunt materiale ce se deformează sub acțiunea unor eforturi de valoare dată și revin la forma inițială după îndepărtarea acestor eforturi, dacă nu a fost depășită limita de elasticitate a materialului.

Mecanica fluidelor poate fi împărțită în: statică, cinematică și dinamică. *Statica fluidelor* studiază repausul fluidelor și acțiunile exercitate de acestea asupra suprafețelor solide cu care vin în contact. *Cinematica fluidelor* studiază mișcarea fluidelor, fără considerarea forțelor care determină sau modifică starea de mișcare și transformările energetice produse. *Dinamica fluidelor* studiază mișcarea fluidelor considerând forțele care determină sau modifică starea de mișcare, precum și transformările energetice produse în timpul mișcării. Mecanica fluidelor utilizează principiile generale ale mecanicii și termodinamicii: principiul conservării masei, principiul variației impulsului, principiul variației momentului cinetic, principiul conservării energiei.

Mecanica fluidelor este o știință complexă din care au izvorât o serie de discipline de sine stătătoare.

Hidraulica desemnează disciplina care studiază repausul și mișcarea lichidelor în scopul rezolvării problemelor ingineresti, folosind metodele și rezultatele mecanicii fluidelor, adaptându-le nevoilor practice, precum și metode specifice. Astfel, în raport cu mecanica fluidelor, metodele hidraulicii sunt mai simple și în același timp limitate la condițiile de

aplicabilitate a schemelor simplificate de rezolvare sau de efectuare a experimentelor. Termenul de hidraulică provine de la cuvintele grecești *hudor* – apă și *aulos* – tub, transportul apei prin conducte și canale fiind domeniul inițial de interes tehnic.

Hidromecanica este ramura Mecanicii fluidelor care studiază legile de repaus și de mișcare a lichidelor și a gazelor în domeniul incompresibil precum și acțiunea lor mecanică asupra corpurilor solide cu care vin în contact.

Aeromecanica este ramura Mecanicii fluidelor care se ocupă cu studiul legilor de repaus și de mișcare a gazelor și cu interacțiunea lor mecanică cu corpurile solide cu care vin în contact.

Aerostatica este o ramură a Aeromecanicii care se ocupă cu studiul legilor de echilibru al corpurilor în gaze, în special în atmosferă.

Aerodinamica studiază mișcarea gazelor peste corpuri, în special a aerului, precum și mișcarea corpurilor solide în aer sau în gaze. Dacă vitezele de deplasare ale aerului sau vitezele relative dintre corpurile solide și aer nu depășesc anumite limite, fluidul poate fi considerat incompresibil și metodele de studiu ale Aerodinamicii sunt cele ale Hidrodinamicii.

Dinamica gazelor tratează în mod special mișcarea fluidelor compresibile. Curgerea la viteze mari a gazelor, curgerea gazelor cu efecte chimice adiționale, mișcarea unui corp în straturile superioare ale atmosferei sunt studiate în cadrul acestei discipline.

Hidrodinamica turbomașinilor se ocupă cu studiul mișcării fluidelor în turbomașini.

Preocupările omenirii în domeniul hidraulicii au debutat cu milenii în urmă, datorită nevoii de a realiza rețele de irigații funcționale. Realizări de excepție din acest domeniu se întâlnesc în Egipt, Mesopotamia, India și China. Deși curgerea prin canale era bine înțeleasă din punct de vedere fizic, nu există dovezi privind o formulare teoretică a principiilor utilizate. De-a lungul timpului, hidrodinamica a beneficiat de o atenție deosebită cu rezultate bune în construcția de nave, sisteme performante de irigații și mașini hidraulice simple, însă abia în secolele XVII și XVIII cercetătorii I. Newton, D. Bernoulli și L. Euler au formulat principiile dinamicii fluidelor ideale. Incitante pentru matematicieni, relațiile formulate s-au bucurat de o apreciere moderată din partea practicienilor, dat fiind că ipoteza fluidului ideal este mult prea restrictivă și conduce adeseori la diferențe semnificative între experiment și teorie. Inginerii au încercat să generalizeze rezultatele experimentelor și au elaborat numeroase formule empirice al căror principal inconvenient îl reprezintă domeniul restrâns de aplicabilitate. Secolul XIX reprezintă perioada în care eforturile

matematicienilor s-au reunit cu cele ale inginerilor. În acest context, au fost puse bazele dinamicii fluidelor vâscoase de către C. L. Navier (1827) și G. G. Stokes (1845), iar cele ale mișcărilor turbulente de O. Reynolds (1883).

Apariția aparatelor de zbor, la începutul secolului XX, a impulsionat dezvoltarea aerodinamicii. N. Jukovski a fundamentat studiul teoretic al profilelor aerodinamice (1905), L. Prandtl a introdus conceptul de strat limită (1904) și a dezvoltat prima teorie a aripilor portante (1918), B. Riemann (1860) și E. Mach (1880) au efectuat primele studii asupra undei de șoc, cu aplicații în deplasarea supersonică a proiectilelor. În aerodinamica supersonică, contribuții teoretice importante au fost aduse și de R. von Mises și K. Friederichs.

În permanență mecanicienii-matematicieni au dezvoltat teoretic mecanica fluidelor, îmbogățind-o cu noi rezultate, iar inginerii au completat-o prin studii experimente. Ambele direcții sunt necesare și se potentează reciproc.

Simularea numerică reprezintă o a treia direcție în mecanica fluidelor, apărută relativ recent. Cu ajutorul ei sunt testate modele teoretice și rezolvate probleme ingineresti. Ultimii ani au consemnat progrese remarcabile, CFD - *Computational Fluid Dynamic* - fiind unul din domeniile pentru care supercalculatoarele sunt indispensabile.

Trebuie subliniată interdependența celor trei direcții. Astfel, deși nu există un model analitic general valabil care să descrie curgerea reală a fluidelor în regim turbulent, totuși combinând eforturile matematicienilor, ale informaticienilor și ale inginerilor se poate răspunde astăzi la multe probleme practice de larg interes tehnic.

În România, sunt demne de menționat contribuțiile academicienilor Caius Iacob în *dinamica fluidelor compresibile* și Lazăr Dragoș în *aerodinamica teoretică*. Academicianul Dumitru Dumitrescu a contribuit la dezvoltarea *hidrodinamicii* și academicienii Nicolae Tipei și V. N. Constantinescu la studiul *teoriei lubrificației*. *Hidrodinamica turbomașinilor* a fost completată prin studiile academicienilor Dorin Pavel și Aurel Bărglăzan, școala românească fiind considerabil îmbogățită de studiile acestora.

Capitolul 1

PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR

Fluidul este corpul care, datorită forțelor intermoleculare mici, are proprietatea de a-și schimba forma sub acțiunea unor eforturi chiar și foarte mici (dacă acestea nu acționează în sensul micșorării volumului) și deci, de a lua - într-un câmp de forțe exterioare, cum este câmpul gravitațional- forma vasului în care se găsește. Într-un fluid în stare de repaus nu pot exista tensiuni tangențiale, ci numai tensiuni normale. Fluidele se împart în lichide și gaze.

Lichidele ocupă un volum dat în spațiu, deoarece distanțele intermoleculare rămân relativ constante și de același ordin de mărime cu diametrul moleculelor. Datorită atracției intermoleculare formează un bloc compact ce ocupă un volum determinat, plasat în partea inferioară a recipientului în care se află. Volumul ocupat de lichide variază ne semnificativ sub acțiunea unor variații ale presiunii și ale temperaturii și de aceea pot fi considerate inexpansibile sau incompresibile.

Gazele se caracterizează prin distanțe intermoleculare mari, de dimensiuni variabile. Gazele ocupă întregul volum al recipientului în care se află, chiar dacă acesta se extinde sau reduce semnificativ, ele fiind expansibile sau compresibile.

1.1. Ipoteza continuității mediului fluid

Materia este discontinuă la scară microscopică. Fenomenele studiate de mecanica fluidelor au însă un caracter macroscopic, cel mai mic volum considerat conținând un număr mare de molecule. În mecanica fluidelor se face abstracție de structura discontinuă a materiei și volumul ocupat de fluid este considerat un mediu material continuu, umplut complet de particule fluide, iar distribuția mărimilor fizice este continuă în acest subspațiu.

Particula fluidă este o porțiune de fluid de formă arbitrară, de dimensiuni mici în raport cu o scară a curgerii și care păstrează caracteristicile modelului de mediu continuu. Particulei de fluid i se asociază un volum elementar dV de masă elementară dm , care conține un număr suficient de mare de molecule pentru a fi sistem termodinamic (la echilibru, fluctuațiile subsistemelor se anulează). Mărimile fizice atașate particulei de fluid la un moment oarecare t sunt cele măsurate în centrul de masă al particulei într-un interval de timp Δt care conține momentul t . *Elementul de volum infinitesimal* dV se consideră mic în raport cu corpul, însă mare în raport cu distanțele intermoleculare.

Fie un corp fluid care la momentul t ocupă domeniul spațial $D(t)$. Prin *ipoteza continuității* se admite că există o corespondență biunivocă între mulțimea particulelor fluide și domeniul $D(t)$; în fiecare punct (x_1, x_2, x_3) al domeniului $D(t)$ se găsește o singură particulă fluidă. Ipoteza permite descrierea proprietăților fluidelor prin *câmpuri*.

De exemplu, masa volumică (masa specifică sau densitatea) la momentul t în punctul P , desemnat prin vectorul de poziție \vec{r} , este prin definiție raportul dintre masa particulei fluide dm aflată în acest punct la momentul t și volumul elementar dV ocupat de particulă. Dacă punctul P parcurge domeniul $D(t)$, atunci se obține *câmpul densitate* $\rho: D(t) \rightarrow (0, +\infty)$.

Similar, în fiecare punct P , identificat prin vectorul de poziție \vec{r} , și la orice moment t , se poate determina *câmpul presiunilor* $p = p(\vec{r}, t)$, *câmpul vitezelor* $V = V(\vec{r}, t)$, *câmpul temperaturilor* $T = T(\vec{r}, t)$ etc.

Funcțiile ce descriu proprietățile fluidului în raport cu timpul și coordonatele punctului sunt continue peste tot sau aproape peste tot. Suprafețele și curbele singulare pe care sunt discontinue mai multe mărimi fizice simultan, pot fi clasificate după criteriul de continuitate al unei mărimi fizice (de exemplu suprafața de separație a două lichide imiscibile și suprafața liberă a unui lichid prezintă o continuitate a presiunii).

1.2. Proprietăți fizice ale fluidelor

1.2.1. Temperatura

Temperatura se determină în raport cu o temperatură de referință; dacă aceasta corespunde lui zero absolut, *temperatura* se numește *absolută* și se notează cu simbolul T . Temperatura este o mărime fundamentală în Sistemul Internațional SI și are formula adimensională $[T] = \Theta$. Unitatea de măsură este kelvinul (K), $\langle T \rangle = 1 \text{ K}$, și reprezintă $1/273,16$ din temperatura punctului triplu al apei, notată cu $T_0 = 273,16 \text{ K}$ (punctul triplu reprezintă starea în care fazele solidă, lichidă și de vapori se găsesc în echilibru). Originea de măsurare a temperaturii absolute este *zero absolut* și este cu $273,16 \text{ K}$ mai mică decât temperatura punctului triplu al apei. La presiunea atmosferică normală, temperatura de topire a gheții este $273,15 \text{ K}$ (cu $0,01 \text{ K}$ mai mică decât temperatura punctului triplu al apei), iar cea de fierbere a apei este $373,15 \text{ K}$. Dacă temperatura se determină în raport cu o altă temperatură de referință decât zero absolut, atunci *temperatura* se numește *relativă*. De exemplu, admitând drept temperatură de referință temperatura de topire a gheții, s-a introdus unitatea de măsură a temperaturii relative numită gradul Celsius ($^{\circ}\text{C}$) reprezentând $1/100$ din intervalul dintre temperatura de topire a gheții, notată cu 0°C și temperatura de fierbere a apei notată cu 100°C (la presiunea atmosferică normală). Temperatura (relativă) exprimată în $^{\circ}\text{C}$ se notează cu θ ; $[\theta] = \Theta$, $\langle \theta \rangle = 1^{\circ}\text{C}$.

Legătura dintre temperatura măsurată pe scara Kelvin și temperatura determinată pe scara Celsius este

$$T = \theta + 273,15. \quad (1.1)$$

Cele două scări de măsurare a temperaturii diferă doar prin originea lor și se poate scrie $\Delta T = \Delta \theta$.

1.2.2. Masa volumică (masa specifică sau densitatea), volumul masic, greutatea volumică

Masa volumică sau *masa specifică* sau *densitatea* într-un punct oarecare P al unui fluid se definește ca limita raportului dintre masa Δm a unei particule elementare (care conține punctul P) și volumul său ΔV , atunci când acesta din urmă tinde către 0 în jurul punctului considerat,

$$\rho(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (1.2)$$

În general, masa volumică ρ mai depinde, în afară de poziția precizată de vectorul de poziție \vec{r} , de timpul t și de temperatura θ și de presiunea p , $\rho = \rho(\vec{r}, t, \theta, p)$. Dacă fluidul este omogen, atunci masa volumică se determină ca masa unității de volum, $\rho = m/V$.

Unitatea de măsură pentru densitate este $\langle \rho \rangle = 1 \text{ kg/m}^3$ (kilogram pe metru cub). Densitatea este un câmp scalar. Lichidele sunt adeseori considerate a avea densitatea constantă. În tabelul 1.1 și anexa 1 sunt prezentate câteva valori ale densității pentru fluide uzuale.

Densitățile unor lichide uzuale, la presiunea atmosferică normală.

Lichidul	kg/m ³	°C	Lichidul	kg/m ³	°C
Apă distilată	1 000	4	Ulei	890-920	15
Anilină	1 022	20	Ulei de anason	999	15
Alcool	790	10	Țiței	850-930	15
Mercur	13 596	0	Benzină	680-740	15
Soluție saturată NaCl	1 210	17	Petrol lampant	790-820	15
Glicerină pură	1 260	0	Gudron de ulei	1 200	15

Tabelul 1.1.

Volumul masic este un câmp scalar definit ca inversul masei volumice,

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)}. \quad (1.3)$$

Unitatea de măsură pentru volumul masic este $\langle v \rangle = 1 \text{ m}^3/\text{kg}$ (metru cub pe kilogram).

O altă caracteristică importantă a unui fluid este *greutatea volumică* (greutatea specifică) care poate fi definită analog masei volumice cu relația

$$\gamma(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV}, \quad (1.4)$$

unde ΔG este greutatea fluidului conținut în volumul elementar ΔV . Greutatea volumică este legată de masa volumică prin relația

$$\gamma(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) g, \quad (1.5)$$

unde g este accelerația gravitațională. Unitatea de măsură a greutateii specifice este $\langle \gamma \rangle = 1 \text{ N/m}^3$ (newton pe metru cub).

Pentru lichide se poate considera greutatea specifică constantă. Greutatea specifică a gazelor variază cu presiunea și temperatura, conform ecuației de stare.

1.2.3. Ecuația de stare a gazelor

Starea unui gaz este definită de parametrii de stare, presiunea p , volumul V și temperatura T , sub forma ecuației caracteristice

$$f(p, V, T) = 0. \quad (1.6)$$

Gazele se caracterizează prin distanțe intermoleculare mari, ceea ce conduce la forțe de coeziune extrem de mici. Gazul perfect este un model de fluid, reprezentat de un ansamblu de molecule punctiforme perfect elastice și lipsite de coeziune.

Ecuația de stare pentru un gaz perfect, cunoscută și sub numele de legea lui Clapeyron, este

$$pV = nRT \quad \text{sau} \quad pV = \frac{m}{M}RT, \quad (1.7)$$

unde $n = m/M$ reprezintă numărul de moli prezenți în volumul V , m masa gazului, M masa moleculară, iar $R = 8,314 \text{ J/mol K}$ este constanta universală a gazelor perfecte.

În mecanica fluidelor se utilizează adeseori o relație dedusă din expresia (1.7), prin raportarea la masa m a fluidului aflat în volumul V

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (1.8)$$

unde ρ este masa volumică (densitatea) și $R = R/M$ reprezintă constanta caracteristică a gazului considerat. Unitatea de măsură pentru constanta gazului este $\langle R \rangle = 1 \text{ J/(kg K)}$ (joule pe kilogram și kelvin).

Pentru gaze reale există formule de calcul derivate din legea lui Clapeyron, corespunzătoare transformărilor termodinamice asociate.

1.2.4. Compresibilitatea și elasticitatea

Compresibilitatea este fenomenul care atașează oricărei variații a presiunii fluidului o variație corelativă a volumului său.

Compresibilitatea izotermică este proprietatea fluidelor de a-și modifica volumul sub acțiunea variației presiunii la temperatură constantă. Evaluarea cantitativă a compresibilității se efectuează cu ajutorul unor coeficienți. Dacă se consideră variații infinitezimale pentru volum și presiune, *coeficientul de compresibilitate izotermică*, β , este definit prin relația

$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T=\text{const}}. \quad (1.9)$$

În cursul transformării masa totală rămâne constantă, așadar $dm = d(\rho V) = Vd\rho + \rho dV = 0$ și expresia coeficientului de compresibilitate izotermică se poate scrie și sub forma

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=\text{const}}. \quad (1.10)$$

Unitatea de măsură utilizată pentru măsurarea coeficientului de compresibilitate este $\langle \beta \rangle = 1 \text{ m}^2/\text{N} = 1 \text{ Pa}^{-1}$ (metru pătrat pe newton). Coeficientul de compresibilitate depinde de temperatură.

Elasticitatea este proprietatea fluidelor de a reveni la valoarea inițială a volumului, când se revine la starea inițială de presiune. *Modulul de elasticitate* al fluidului ε are expresia

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T=\text{const}} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T=\text{const}} . \quad (1.11)$$

Unitatea de măsură pentru modulul de elasticitate $\langle \varepsilon \rangle = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$. Valorile modulului de elasticitate depind de temperatură și presiune.

Aplicația 1.1. O pompă cu șurub este umplută cu ulei la presiunea atmosferică. Să se determine numărul de rotații n necesar pentru a crea o suprapresiune de $\Delta p = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, dacă diametrul este de $d = 10 \text{ mm}$, pasul șurubului $h = 1 \text{ mm}$, volumul inițial $V = 400 \text{ ml}$ la presiunea atmosferică normală. Coeficientul de compresibilitate izotermică a uleiului este $\beta = 4,85 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

Soluție

Utilizând definiția coeficientului de compresibilitate izotermică (1.9) se deduce legătura dintre variația relativă a volumului sub acțiunea variației de presiune

$$\frac{\Delta V}{V} = -\beta \Delta p .$$

Suprapresiunea Δp corespunde micșorării volumului, $-\Delta V = n \frac{\pi d^2}{4} h$.

Rezultă numărul de rotații

$$n = \frac{4V\beta\Delta p}{\pi d^2 h} = \frac{4 \cdot 400 \cdot 10^{-6} \cdot 4,85 \cdot 10^{-10} \cdot 9,81 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}} = 24,2 .$$

În concluzie, suprapresiunea $\Delta p = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ se realizează după 24,2 rotații ale șurubului.

1.2.5. Aderarea la suprafețe solide

Aderarea unui fluid la o suprafață solidă este un fenomen care se manifestă prin prezența forțelor de atracție dintre particulele vecine, ale unui fluid și ale unui solid în contact, aflate la distanțe moleculare unele de altele. Forțele de adeziune depind de natura suprafeței solidului, de proprietățile fluidului și de temperatură. Aderența poate fi fizică, datorată forțelor de atracție moleculară pentru un fluid în repaus sau în mișcare, și mecanică, datorată forțelor de frecare pentru un fluid în mișcare.

1.2.6. Viscositatea

Viscozitatea este proprietatea fluidelor de a se opune deformațiilor unghiulare ale particulei fluide, ca rezultat al interacțiunii dintre particulele constitutive. Datorită viscozității în suprafața de separație a straturilor care se deplasează cu viteze diferite, se dezvoltă tensiuni tangențiale. Interacțiunea dintre particulele situate de o parte și de alta a unei suprafețe de separație se manifestă prin tensiuni normale și tangențiale.

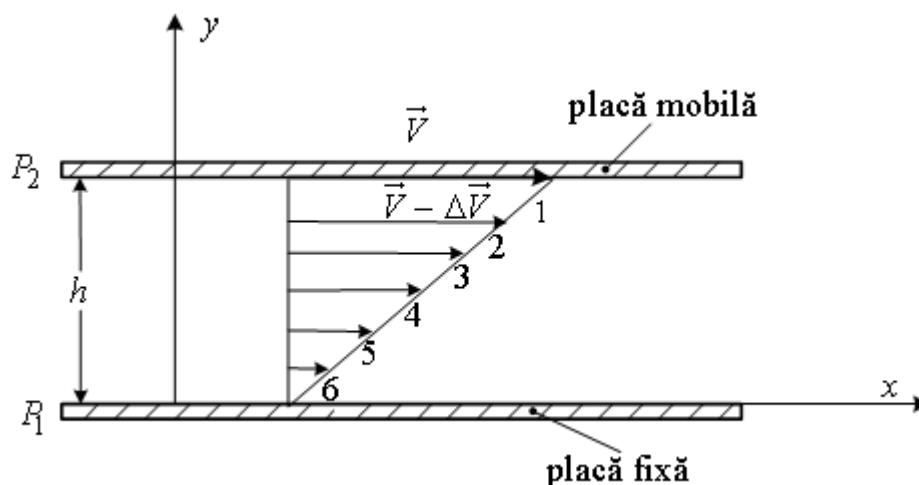


Fig. 1.1. Experiența lui Newton.

Fie un fluid aflat între două plăci plane paralele, situate la distanța h . Placa inferioară P_1 este fixă, cea superioară P_2 se deplasează cu viteza constantă \vec{V} . Fluidul poate fi asimilat unei serii de straturi subțiri, de exemplu în figura 1.1, distanța dintre plăci a fost divizată în 6 straturi. Efectuând această experiență, Newton a constatat că datorită aderenței la placa mobilă P_2 stratul 1 se deplasează cu viteza \vec{V} , iar că după un scurt

interval de timp stratul 2 aflat în vecinătate se pune în mișcare cu o viteză mai mică, $\vec{V} - \Delta\vec{V}$. Fenomenul se datorește existenței între straturile 1 și 2 a unei tensiuni tangențiale τ_{yx} , care duce la antrenarea în mișcare a stratului 2, aflat la momentul inițial în repaus. În mod similar stratul 2 antrenează stratul 3, în timp ce acesta la rândul său acționează asupra stratului 2, în sensul frânării. S-a constatat că un strat oarecare de fluid accelerează stratul adiacent care are o viteză mai mică și frânează pe cel care are o viteză mai mare prin intermediul tensiunilor tangențiale. Fenomenul se manifestă în întregul fluid, până în stratul 6, a cărei viteză este nulă datorită aderării la placa fixă P_1 .

Experiența arată că valoarea tensiunii tangențiale este proporțională cu modulul vitezei V , de deplasare a plăcii superioare și invers proporțională cu distanța dintre plăci,

$$\tau_{yx} = \eta \frac{V}{h} \quad (1.12)$$

unde η este *viscozitatea dinamică* (sau coeficientul dinamic de viscozitate).

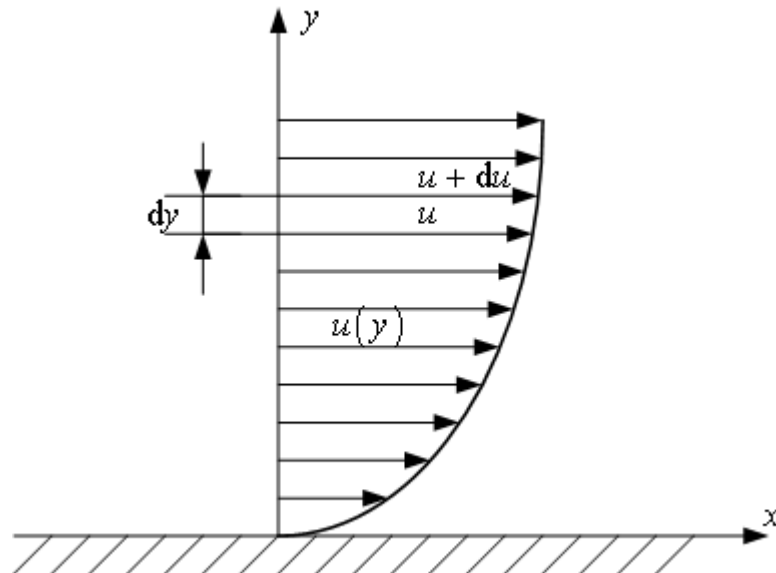


Fig.1.2. Schemă pentru definirea viscozității dinamice; legea lui Newton.

Generalizând, în mișcarea a două straturi de fluid aflate la o distanță infinit mică dy care alunecă unul față de altul cu viteza relativă du (fig. 1.2), valoarea tensiunii tangențiale este dată de legea lui Newton

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} \quad (1.13)$$

Viscozitatea este una dintre proprietățile ce caracterizează comportarea unui fluid sub acțiunea unui câmp de forțe exterioare. Legea lui Newton (1.13) este legea de comportare cea mai simplă a unui fluid newtonian în mișcare laminară.

În Sistemul Internațional unitatea de măsură pentru viscozitatea dinamică este $\langle \eta \rangle = 1 \text{ kg}/(\text{ms}) = 1 \text{ Ns}/\text{m}^2 = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (kilogram pe metru și secundă, newton secundă pe metru pătrat, pascal secundă). Se mai utilizează și unitatea din sistemul C.G.S., numită poise, după numele cercetătorului francez Poiseuille, $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Ns}/\text{m}^2$ (1 poise).

Fluidele care respectă legea lui Newton se numesc *fluide newtoniene*. Fluidele utilizate cel mai frecvent în tehnică apa, aerul, uleiul sunt fluide newtoniene. Alte fluide, ca de exemplu vopseaua, nu respectă legea lui Newton. În figura 1.3 se prezintă variația $\tau = \tau(du/dy)$ pentru un fluid newtonian și câteva fluide nenewtoniene.

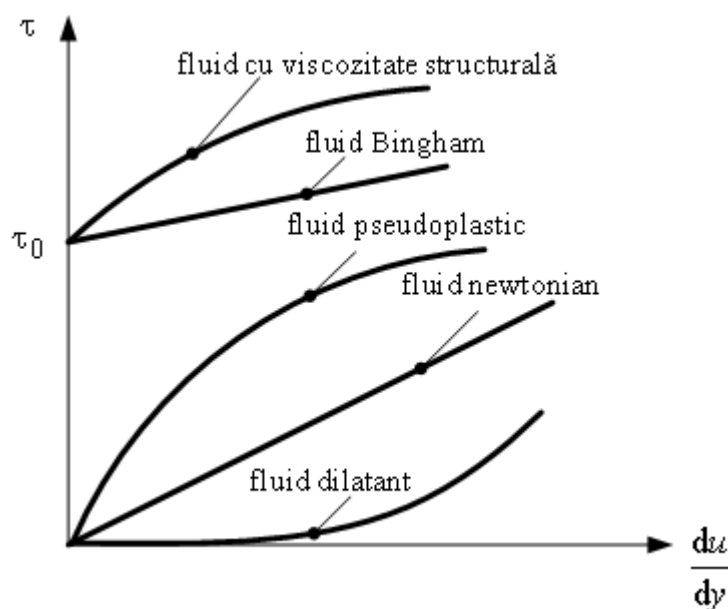


Fig.1.3. Variația tensiunii tangențiale funcție de gradientul vitezei.

Fluidele vâscoplastice curg, dacă tensiunea depășește o anumită limită τ_0 . *Fluidele de tip Bingham* (de exemplu noroaiele și vopselele) se încadrează în această categorie. *Fluidele pseudoplastice* au o orientare

treptată a particulelor (suspensii cu celuloză sau cărbune). *Fluidele dilatante* caracterizează comportarea unor suspensii cu conținut mare de fază solidă (mortar), caz în care variația tensiunii tangențiale în funcție de gradientul vitezei nu depinde de timp.

Influența temperaturii și a presiunii asupra viscozității dinamice

S-a constatat că viscozitatea variază cu temperatura și presiunea, diferit pentru lichide și pentru gaze. Explicația constă în structura moleculară diferită, mărimea viscozității dinamice depinzând în mare măsură de atracția dintre molecule.

La lichide, mărirea presiunii conduce la creșterea viscozității dinamice η după o lege practic exponențială, iar creșterea temperaturii scade forțele de coeziune dintre molecule și prin urmare viscozitatea scade. La gaze, distanțele intermoleculare sunt mari și forțele de coeziune mici. La creșterea temperaturii, mișcarea haotică a moleculelor devine mai intensă și împiedică curgerea și viscozitatea dinamică crește.

O altă noțiune pentru descrierea viscozității este *coeficientul cinematic de viscozitate*,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad (1.14)$$

Unitatea de măsură a viscozității cinematice este $\langle \nu \rangle = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ (metru pătrat pe secundă). Se mai utilizează în sistemul C.G.S, $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ (1 stokes, 1 centimetru pătrat pe secundă), numită astfel după numele cercetătorului G. G. Stokes.

Variația viscozității cinematice cu temperatura și presiunea

Deoarece viscozitatea dinamică și densitatea variază cu presiunea și temperatura, viscozitatea cinematică trebuie raportată la o valoare stabilită a acestor parametri. Influența presiunii asupra viscozității cinematice este neînsemnată. La creșterea presiunii se înregistrează totuși o creștere ușoară a viscozității cinematice la lichide și o descreștere nesemnificativă la gaze reale.

Influența temperaturii asupra viscozității cinematice este importantă. La creșterea temperaturii se înregistrează o descreștere a viscozității cinematice pentru lichide și o creștere în cazul gazelor.

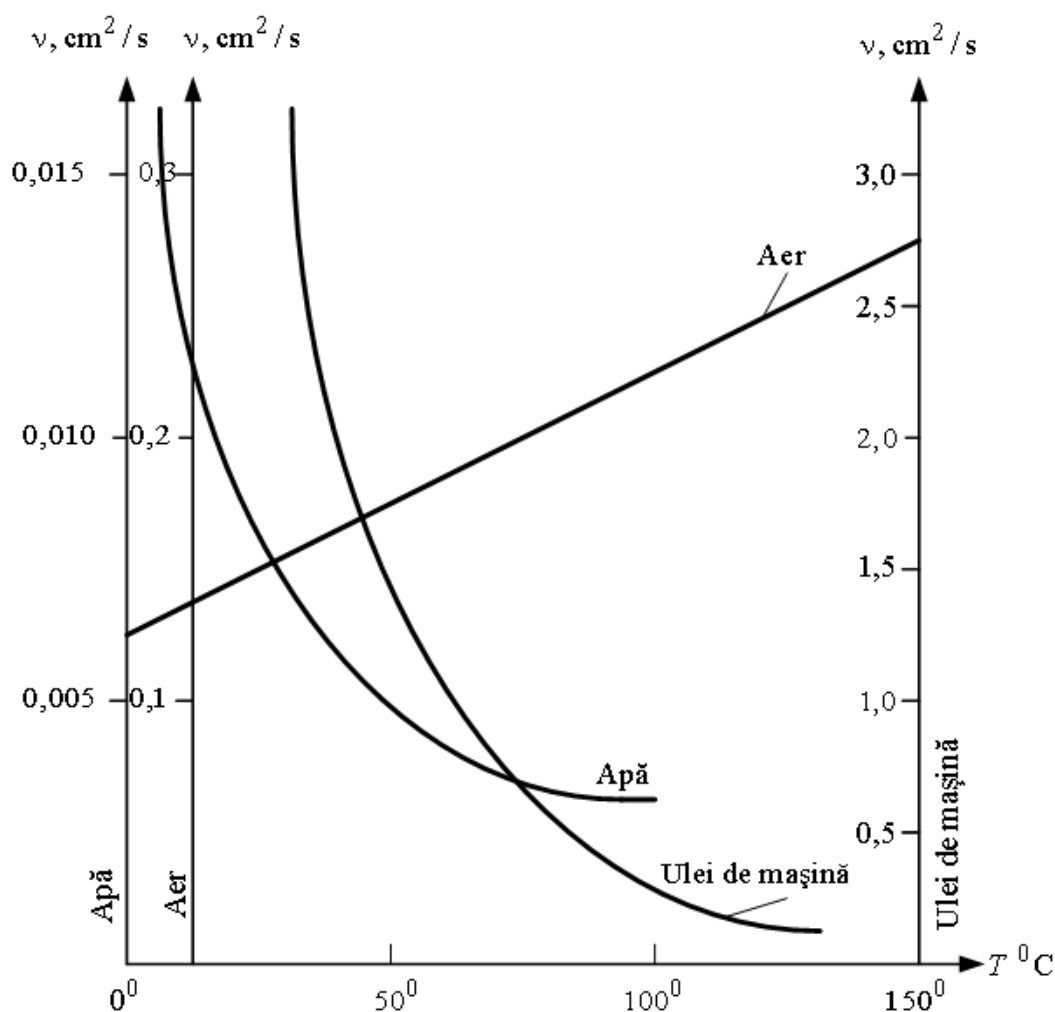


Fig.1.4. Variația viscozității cinematice cu temperatura.

În figura 1.4 este reprezentată variația viscozității cinematice pentru unele fluide: apă, aer, ulei de mașină.

1.2.7. Conducția termică

Transmiterea căldurii se realizează prin conducție, convecție și radiație. Conducția constă în propagarea căldurii în interiorul unui fluid datorită transferului de energie prin ciocniri între particulele elementare vecine, din aproape în aproape, în toată masa fluidului.

Fie un fluid în repaus, aflat între două plăci plane paralele situate la distanța h , suficient de mică pentru a nu exista curenți de convecție termică. Placa inferioară are temperatura T_1 , placa superioară temperatura T_2 (fig. 1.5). Experimental se constată că fluidul aflat în contact cu o placă are aceeași temperatură cu placa. După un interval de timp suficient de

mare există o repartiție liniară a temperaturii fluidului aflat între cele două plăci, deoarece căldura se transmite de la placa superioară mai caldă, la cea inferioară mai rece. La distanța y de placa inferioară, temperatura T a fluidului se poate deduce din expresia

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{y}{h} . \quad (1.15)$$

Altfel spus, gradientul temperaturii pe direcția normală la placă este constant, rezultat ce poate fi generalizat.

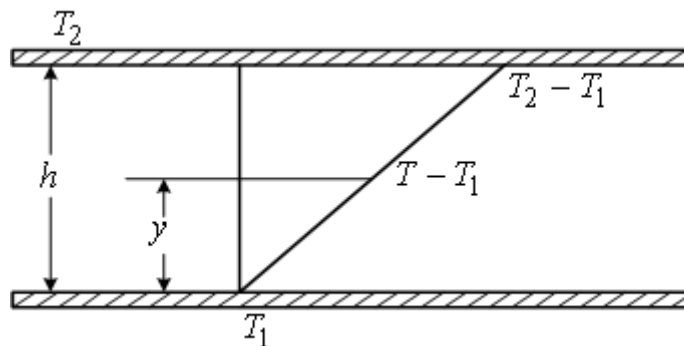


Fig.1.5. Variația temperaturii în fluid datorită conducției termice.

Fluxul termic este cantitatea de căldură care trece printr-o suprafață cu temperatură constantă în unitatea de timp. *Densitatea fluxului termic* φ se definește ca fiind fluxul termic care trece prin unitatea de arie a unei suprafețe izoterme. Densitatea fluxului de căldură respectă *legea lui Fourier*

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dy} , \quad (1.16)$$

unde λ este *conductibilitatea termică*. Semnul minus arată că sensul de transport al căldurii este în sensul descrescător al temperaturii. Unitatea de măsură a conductibilității este $\langle \lambda \rangle = 1 \text{ W / m K}$ (watt pe metru și kelvin).

1.2.8. Difuzia masică

Difuzia masică constă în deplasarea unui ansamblu de particule sub influența unui gradient de concentrație, până la stabilirea unei concentrații uniforme în toate punctele și are loc în cazul unui amestec fluid, format din

mai multe componente. În cazul a două fluide cu concentrații diferite, chiar și în absența oricărui curent și la temperatură constantă, are loc un transport din punctele de concentrație ridicată către punctele de concentrație mai mică. Fenomenul este numit *difuzie naturală*.

Densitatea fluxului de cantitate de substanță printr-un element de suprafață dS care separă două straturi de fluid de concentrații $C + dC$ și C aflate la distanța dy se determină cu *legea lui Fick*

$$J = -D \frac{dC}{dy}, \quad (1.17)$$

unde D este difuzivitatea moleculară la presiunea și temperatura din centrul elementului de suprafață dS și $\frac{dC}{dy}$ este gradientul concentrației în direcția normalei la elementul dS . Semnul minus arată că difuzia se realizează în sensul concentrațiilor descrescătoare. Unitatea de măsură a difuzității este $\langle D \rangle = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ (metru pătrat pe secundă).

1.2.9. Tensiunea superficială

La suprafața de contact dintre două lichide nemiscibile sau dintre un lichid și un gaz apar o serie de fenomene datorate forțelor de atracție dintre particule. În interiorul lichidului aceste forțe se anulează reciproc, dar în apropierea suprafeței de contact, moleculele sunt atrase cu forțe moleculare diferite pe cele două părți ale suprafeței. Datorită dezechilibrului apărut, suprafața de contact își modifică forma. (fig. 1.6). Deoarece pentru deformarea acestei suprafețe se consumă un lucru mecanic, rezultă că lichidul are o energie potențială superficială proporțională cu aria suprafeței de separație. Pentru suprafața de separație dintre un lichid și un gaz, starea de echilibru a sistemului, corespunzătoare unui minim al energiei potențiale, este atinsă când suprafața liberă este minimă. Se explică astfel forma sferică a picăturilor de apă, sfera fiind corpul geometric de suprafață minimă pentru un volum dat.

Tensiunea superficială σ a unui lichid este definită prin forța care se exercită tangențial la suprafață, pe unitatea de lungime de pe suprafața lichidului și provine din interacțiunea dintre moleculele de fluid din stratul superficial și moleculele de fluid din interiorul lichidului

$$\sigma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l}. \quad (1.18)$$

Tensiunea superficială σ se măsoară în $\langle \sigma \rangle = 1 \text{ N/m} = 1 \text{ J/m}^2$ (newton pe metru sau joule pe metru pătrat).

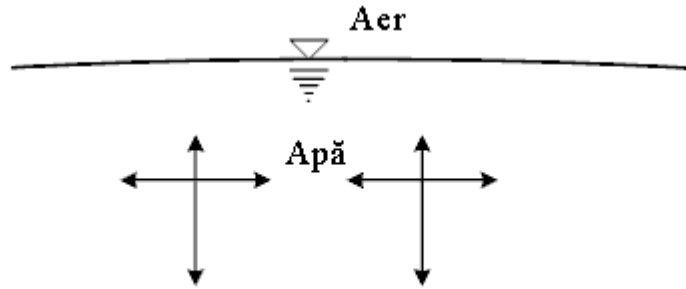


Fig. 1.6. Tensiunea superficială datorată atracției moleculare.

Pe frontiera lichid-gaz, diferența dintre presiunile exercitate pe aceasta într-un punct dat se poate determina cu *legea lui Laplace*

$$p - p_0 = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.19)$$

unde p - presiunea lichidului, p_0 - presiunea gazului, σ - tensiunea superficială a lichidului față de gazul considerat, iar r_1 și r_2 - razele principale de curbură ale interfeței, în punctul dat.

În cazul în care se calculează tensiunea superficială pe frontiera dintre două lichide imiscibile, valoarea lui p din relația (1.19) reprezintă presiunea lichidului mai dens, iar p_0 presiunea lichidului cu densitate mai mică.

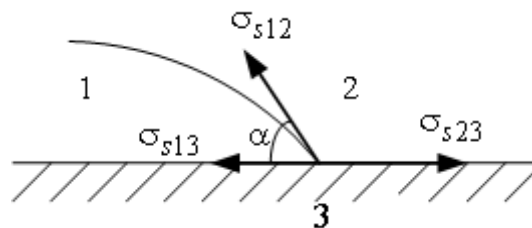


Fig. 1.7. Tensiunea superficială la contactul dintre două fluide și o suprafață solidă.

Dacă se consideră trei corpuri, de exemplu un lichid 1 și un gaz 2 în contact cu un solid 3, se constată că suprafața de separație a fluidelor face cu peretele solid un unghi α (fig. 1.7). Se notează tensiunea superficială dintre fluidele 1 și 2 cu σ_{s12} , dintre lichidul 1 și peretele solid cu σ_{s13} și dintre gazul 2 și peretele solid cu σ_{s23} . Condiția de echilibru este

$$\sigma_{s12} \cos \alpha = \sigma_{s23} - \sigma_{s13}. \quad (1.20)$$

Dacă $\sigma_{s23} - \sigma_{s13} < 0$, unghiul $\alpha > \frac{\pi}{2}$ și se spune că peretele nu este ud de lichid. În cazul în care $\sigma_{s23} - \sigma_{s13} > 0$, unghiul $\alpha < \frac{\pi}{2}$ și peretele este ud de lichid. Dacă are loc inegalitatea $\sigma_{s23} - \sigma_{s13} > \sigma_{s12}$, ecuația (1.20) nu este satisfăcută, echilibrul este imposibil și lichidul se întinde pe toată suprafața peretelui.

1.2.10. Fenomene capilare

Capilaritatea reprezintă ansamblul de fenomene la contactul dintre trei corpuri: un solid și două fluide. Fenomenele capilare se manifestă prin abateri de la principiul orizontalității suprafeței libere a lichidului și apariția unei diferențe de cotă h între nivelul liber al lichidului aflat într-un tub capilar (de diametru foarte mic) și nivelul liber al lichidului exterior.

Astfel, în tuburile capilare, se constată o ascensiune a lichidului în tub față de suprafața liberă în cazul lichidului care udă tubul cu formarea unui menisc concav și o coborâre pentru un lichid care nu udă tubul cu formare unui menisc convex (fig.1.8). Faptul că lichidul udă sau nu peretele vasului depinde de natura lichidului și a peretelui.

Determinarea pe cale exactă a diferenței h între nivelul inițial al lichidului și cel atins după manifestarea fenomenului de capilaritate este complicată. Legea lui Jurin permite calculul aproximativ al acestei diferențe de nivel

$$h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{\rho r g}, \quad (1.21)$$

unde σ este tensiunea superficială a lichidului față de perete, α - unghiul de racordare a meniscului la suprafața peretelui, ρ - densitatea lichidului, $r = d/2$ - raza tubului și g - accelerația gravitațională.

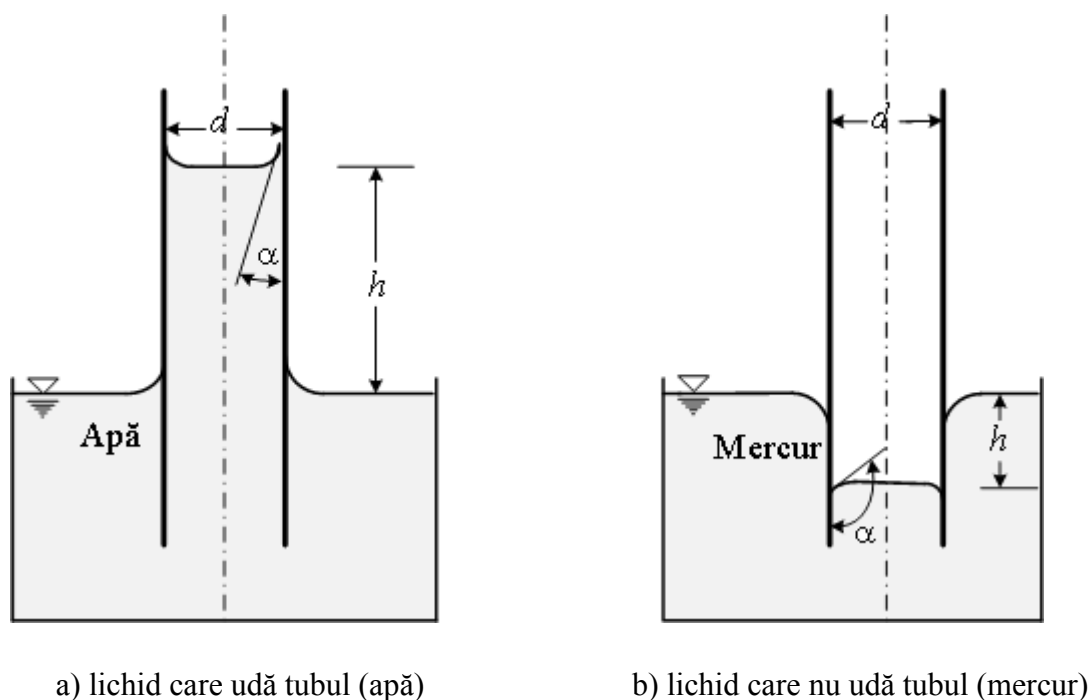


Fig. 1.8. Fenomenul de capilaritate într-un tub.

1.2.11. Absorbția și degajarea gazelor

Absorbția este un fenomen în care gazele ce alcătuiesc *faza absorbată* pătrund prin difuzie în masa unui lichid (*faza absorbantă*) prin suprafața de separație dintre cele două faze. Absorbția poate fi crescută prin creșterea presiunii.

Fenomenul se produce dacă concentrația componentelor fazei absorbate în stare gazoasă este mai mare decât cea corespunzătoare echilibrului față de faza absorbantă cu care este pusă în contact la presiune și temperatură dată. *Coeficientul de absorbție* α reprezintă volumul de gaz dizolvat în unitatea de volum lichid în condiții precizate de presiune și temperatură.

Procesul invers, de evacuare a gazelor dizolvate, se numește *degajarea gazelor* sau *desorbție*.

1.2.12. Cavitația

Limita fizică a presiunii minime într-un curent lichid este presiunea vaporilor saturați p_v , la temperatura de lucru. Când într-un punct oarecare de pe traseul curentului de fluid presiunea atinge această valoare se formează în punctul respectiv o pungă umplută cu vapori și gaze. Cavitatea

fiind antrenată de curent în zone unde presiunea este mai mare decât p_v , vaporii se condensează brusc, ceea ce duce la implozia violentă a bulelor formate. Fenomenul poartă numele de *cavitație* și se poate defini ca procesul de formare și surpare a unor cavități într-un curent lichid.

Funcționarea în regim de cavitație a mașinilor hidraulice are efecte indezirabile: căderea curbelor caracteristice, distrugeri ale materialului, vibrații și zgomote caracteristice. Apariția cavitației este posibilă, deoarece lichidele conțin bule microscopice de gaz, denumite *nuclee* sau *germeni de cavitație*. În punctele în care presiunea scade până la valoarea critică, nucleele își măresc rapid volumul, transformându-se în cavități. Acestea sunt antrenate către zonele de presiune crescută, unde vaporii din interior se condensează, iar bulele își micșorează brusc volumul. Are loc fenomenul de *implozie*. Presiunea creată se transmite de la bulă la peretele solid care ghidează curentul, fie direct, fie sub forma unei unde de șoc ce străbate perna de lichid interpus. Apar solicitări extrem de puternice asupra conturului solid ce pot depăși rezistența admisibilă a tuturor materialelor tehnice cunoscute.

Cavitația este un proces deosebit de complex, cuprinzând pe lângă fenomenele mecanice descrise și fenomene termice, chimice și electrice. Fenomenele termice se traduc prin generarea de căldură datorită comprimării gazului conținut în bulă și transformarea în căldură a lucrului mecanic de deformare a materialului asupra căruia acționează unda de șoc. Fenomenele chimice ce apar în procesul surpării bulei creează diferite substanțe, multe din ele corozive. De exemplu, în cazul în care se lucrează cu apă potabilă obișnuită se produce disocierea vaporilor de apă și se obține peroxid de hidrogen. Din punct de vedere electric, fenomenul de cavitație se traduce prin apariția unor diferențe de potențial. Sub acțiunea câmpului electric apare fenomenul de ionizare, gazul din interiorul bulei cavitaționale devenind un bun conducător de electricitate, luând naștere o descărcare electrică.

Fenomenul de cavitație poate fi evitat printr-o proiectare și exploatare îngrijită. Alierea oțelurilor ridică rezistența acestora la distrugerea prin cavitație. Oțelurile înalt aliate cu 12...14% Cr, cu sau fără adaos de nichel și o structură martensitică și oțelurile inoxidabile austenico-ferritice având 20% Cr și 8% Ni rezistă bine la cavitație, acestea fiind materialele din care se confecționează palele turbinelor hidraulice.

Capitolul 2

PRINCIPIILE GENERALE ALE MECANICII FLUIDELOR

2.1. Forțe și tensiuni în fluide

Dintr-un domeniu fluid se separă un subdomeniu. Forțele care acționează asupra corpului fluid astfel format se pot grupa în două categorii: forțe interioare și forțe exterioare.

Forțele interioare sunt egale și de sens contrar două câte două, astfel încât formează un sistem echivalent cu zero. Se deosebesc: *forțe masice interioare* ce provin din interacțiunea elementelor materiale care compun mediul continuu considerat (de exemplu, atracția newtoniană dintre particule) și *forțe superficiale interioare* ce provin din tensiunile interioare de coeziune.

La rândul lor și forțele exterioare pot fi clasificate în forțe masice și forțe superficiale.

Forțele masice exterioare provin din prezența mediilor materiale exterioare mediului fluid considerat (de exemplu forțele de natură electromagnetică, forța gravitațională). Aceste forțe sunt de ordinul de mărime al masei corpului fluid și se notează cu $\overrightarrow{F_M}$. Vectorul

$\overrightarrow{F_m} = \frac{d\overrightarrow{F_M}}{dm}$ [N/kg] reprezintă forța masică exterioară pe unitatea de masă

și depinde de vectorul de poziție \vec{r} al centrului de masă al particulei fluide și de timpul t , $\overrightarrow{F_m}(\vec{r}, t)$.

Forțele superficiale exterioare \vec{F}_S provin din contactul suprafețelor de separare dintre corpul fluid și alte medii (restul domeniului fluid, alte fluide, pereți solizi).

Fie un punct M situat pe suprafața de contact $S(t)$ a corpului fluid cu alt mediu și un element de arie $d\sigma$ în jurul acestui punct. Acțiunea mediului exterior corpului fluid asupra elementului de arie este dată de o forță $d\vec{F}_S = \vec{T} d\sigma$. Vectorul \vec{T} depinde de poziția punctului M identificată prin vectorul de poziție \vec{r} , de orientarea suprafeței $d\sigma$ precizată de direcția normalei exterioare \vec{n} și de timpul t (fig. 2.1). Notând cu \vec{n} normala exterioară, tensiunea pe suprafața exterioară are expresia

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{r}, \vec{n}, t). \quad (2.1)$$

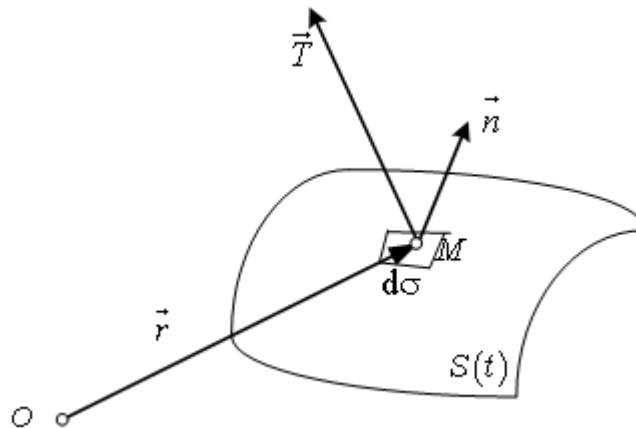


Fig. 2.1. Tensiunea pe suprafața exterioară corpului fluid.

Analog se definește și *tensiunea pe suprafața interioară*.

Fie acum, punctul M situat în interiorul corpului fluid, $S(t)$ o suprafață ce conține acest punct și separă corpul în două domenii $D_1(t)$ și $D_2(t)$ și $d\sigma$ un element de suprafață în jurul punctului M pe $S(t)$. Mediul material care ocupă domeniul $D_2(t)$ acționează asupra mediului material care ocupă domeniul $D_1(t)$ cu care se găsește în contact printr-o forță $\vec{T} d\sigma$. La rândul său, mediul material din domeniul $D_1(t)$ acționează asupra mediului material din $D_2(t)$ pe aceeași porțiune de suprafață cu o forță opusă (fig. 2.2). Conform principiului acțiunii și reacțiunii

$$\vec{T}(\vec{r}, -\vec{n}, t) d\sigma = -\vec{T}(\vec{r}, \vec{n}, t) d\sigma. \quad (2.2)$$

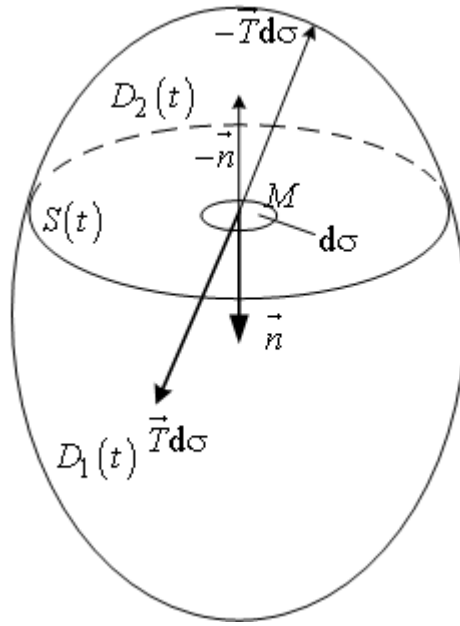


Fig. 2.2. Starea de tensiune într-un fluid.

Tensiunea în punctul $M(\vec{r})$, se poate descompune într-o componentă normală și una tangențială,

$$\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t. \quad (2.3)$$

Tensiunea normală se definește ca

$$\vec{T}_n = (\vec{n} \vec{T}) \vec{n} = T_n \vec{n}. \quad (2.4)$$

Conform convenției normalei exterioare, dacă \vec{T} și \vec{n} sunt dirijați de aceeași parte a suprafeței, modulul $T_n = \vec{n} \vec{T}$ este pozitiv și se spune că fluidul suferă o tensiune, iar dacă T_n este negativ, fluidul suferă o compresiune.

Pentru un fluid nevâscos, fie în mișcare, fie în repaus, și pentru un fluid vâscos în repaus, tensiunea de suprafață este

$$\vec{T}(\vec{r}, \vec{n}, t) = -p(\vec{r}, t) \vec{n}, \quad (2.5)$$

scalarul p fiind *presiunea*.

Tensiunea tangențială \vec{T}_t , numită și tensiune de alunecare sau de forfecare, apare numai în cazul unui fluid vâscos în mișcare.

2.2. Principiile generale ale mecanicii aplicate unui corp fluid

Principiile de mișcare a mediilor continue, în general, și a fluidelor în particular sunt principii ale mecanicii newtoniene. Aceste principii sunt: principiul conservării masei, principiul variației impulsului, principiul variației momentului cinetic.

Fie un corp fluid arbitrar. La momentul t , acesta ocupă domeniul $\Delta(t)$ de frontieră $\Sigma(t)$. Se presupune că domeniul $\Delta(t)$ îndeplinește condițiile de aplicare a transformării lui Gauss-Ostrogradski.

Principiul conservării masei

Masa oricărui corp fluid rămâne constantă în timp,

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

așadar

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} \rho \, d\tau = 0. \quad (2.7)$$

Principiul variației impulsului

Derivata impulsului \vec{H} a corpului fluid, în raport cu timpul, este egală cu rezultanta \vec{R} a forțelor exterioare care acționează asupra acestuia,

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{R}. \quad (2.8)$$

Rezultanta \vec{R} este suma dintre rezultanta forțelor masice exterioare, $\iiint_{\Delta(t)} \rho \vec{F}_m d\tau$, și rezultanta forțelor superficiale exterioare, $\iint_{\Sigma(t)} \vec{T} d\sigma$. Așadar, principiul variației impulsului se scrie sub forma

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} \rho \vec{V} d\tau = \iiint_{\Delta(t)} \rho \vec{F}_m d\tau + \iint_{\Sigma(t)} \vec{T} d\sigma. \quad (2.9)$$

Principiul variației momentului cinetic

Derivata momentului cinetic \vec{K} al corpului fluid față de polul O , în raport cu timpul, este egală cu momentul resultant \vec{M} al forțelor exterioare față de acel pol,

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (2.10)$$

Principiul variației momentului cinetic are expresia

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{V}) d\tau = \iiint_{\Delta(t)} \vec{r} \times \rho \vec{F}_m d\tau + \iint_{\Sigma(t)} \vec{r} \times \vec{T} d\sigma, \quad (2.11)$$

unde \vec{r} este vectorul de poziție față de polul O (originea sistemului de axe).

Principiul variației energiei

Variația energiei totale a unui sistem în raport cu timpul este egală cu suma dintre puterea mecanică a forțelor exterioare (lucru mecanic în

unitatea de timp) și puterea termică (cantitatea de căldură schimbată cu exteriorul în unitatea de timp),

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta \mathcal{L}}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = P + \Phi, \quad (2.12)$$

unde $\delta \mathcal{L}$ – lucrul mecanic elementar, δQ – cantitatea elementară de căldură schimbată cu exteriorul, P - puterea mecanică a forțelor exterioare, Φ - puterea termică (fluxul termic). Simbolul δ marchează faptul că $\delta \mathcal{L}$ și δQ nu sunt diferențiale totale.

Energia totală E este formată din energia internă E_i și energia cinetică E_c a sistemului,

$$E = E_i + E_c = \iiint_{\Delta(t)} \rho e \, d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\Delta(t)} \rho V^2 \, d\tau, \quad (2.13)$$

unde, e reprezintă energia internă masică.

Puterea mecanică P a forțelor exterioare este prin definiție

$$P = \frac{\delta \mathcal{L}}{dt} = \iiint_{\Delta(t)} \rho (\vec{F}_m \cdot \vec{V}) \, d\tau + \iint_{\Sigma(t)} (\vec{T} \cdot \vec{V}) \, d\sigma. \quad (2.14)$$

Ca și în cazul forțelor se face distincție între cantitatea de căldură distribuită în interior δQ_d datorită fenomenului de radiație (acțiune la distanță) și cantitatea de căldură de contact δQ_c datorită fenomenului de conducție,

$$\delta Q = \delta Q_d + \delta Q_c \quad (2.15)$$

Raportând aceste cantități la timp se obține puterea termică (fluxul termic)

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q_d}{dt} + \frac{\delta Q_c}{dt} = \iiint_{\Delta(t)} \rho r \, d\tau + \iint_{\Sigma(t)} \varphi \, d\sigma, \quad (2.16)$$

unde r este puterea termică radiantă pe unitatea de masă și φ reprezintă densitatea de flux termic (raportul dintre fluxul termic care trece printr-o suprafață izotermă și aria acestei suprafețe).

Principiul variației energiei (primul principiu a termodinamicii), se scrie

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) d\tau = \iiint_{\Delta(t)} \rho \left(\overline{F_m} \cdot \vec{V} + r \right) d\tau + \iint_{\Sigma(t)} \left(\vec{T} \cdot \vec{V} + \varphi \right) d\sigma. \quad (2.17)$$

Uneori, acest principiu se numește ecuația de conservare a energiei.

2.3. Tensorul tensiunilor

Se raportează mișcarea la sistemul de coordonate $(Ox_1 x_2 x_3)$. Fie \vec{i}_j versorul axei Ox_j . Tensiunea în punctul M , situat pe o suprafață a cărei normală este $\vec{n}(M) \equiv \vec{i}_j$, se notează cu

$$\vec{T}_j(M, t) = \vec{T}(M, \vec{i}_j, t). \quad (2.18)$$

Proiecțiile vectorului $\vec{T}_j(M, t)$ pe axele Ox_i se notează cu $T_{ji}(M, t)$. Primul indice indică direcția normalei suprafeței, iar al doilea indice arată direcția după care se face proiecția. Mărimile cu indici identici reprezintă tensiuni normale, iar cei cu indici diferiți reprezintă tensiuni tangențiale.

Cele nouă elemente $T_{ji}(M, t)$ alcătuiesc o matrice pătratică care se numește *matricea asociată tensorului tensiunilor*. Elementele sale sunt coordonatele *tensorului tensiunilor* \vec{T} . Se identifică tensorul tensiunilor cu matricea asociată,

$$\vec{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Teorema următoare face legătura între tensorul tensiunilor și vectorul tensiune.

Teorema lui Cauchy.

Fie o suprafață de normală \vec{n} trecând prin punctul M fixat. Atunci

$$\vec{T}(M, \vec{n}, t) = \sum_{j=1}^3 \vec{T}_j(M, t) n_j, \quad (2.20)$$

unde n_j sunt cosinușii directori ai normalei \vec{n} , $n_j = \vec{n} \cdot \vec{i}_j$.

Demonstrație

Fie un corp fluid care la momentul t ocupă domeniul $\Delta(t)$, care este un tetraedru elementar a cărui vârfuri sunt punctele M, M_1, M_2, M_3 (fig.2.3). Se notează cu εl_j distanțele MM_j . Se consideră parametrul mic $\varepsilon > 0$ și segmentele MM_j ($j=1,2,3$) paralele la axele de coordonate. Direcția normalei $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ la planul $M_1 M_2 M_3$ dirijată spre exterior este independentă de parametrul ε .

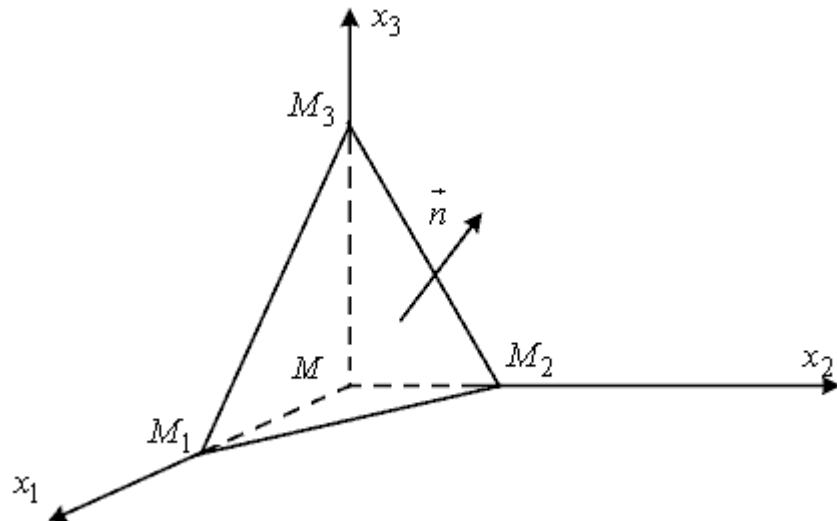


Fig. 2.3. Elementul de fluid de forma unui tetraedru elementar.

Suprafețele laterale ale tetraedrului, adică proiecțiile suprafeței $M_1 M_2 M_3$ pe planele de coordonate, au ariile

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2} l_2 l_3 \varepsilon^2, \quad d\sigma_2 = \frac{1}{2} l_3 l_1 \varepsilon^2, \quad d\sigma_3 = \frac{1}{2} l_1 l_2 \varepsilon^2. \quad (2.21)$$

Legătura dintre ariile $d\sigma_j$ și aria $d\sigma$ a triunghiului $M_1M_2M_3$ este dată de relațiile

$$d\sigma_j = n_j d\sigma \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2.22)$$

în care

$$d\sigma = \sqrt{d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2}, \quad (2.23)$$

iar n_j sunt cosinușii directori ai normalei \vec{n} la suprafața $M_1M_2M_3$.

Dacă lungimea unei laturi este de ordinul ε , atunci aria oricărui triunghi care reprezintă suprafețele laterale ale tetraedrului este de ordinul ε^2 , iar volumul tetraedrului este de ordinul ε^3 ,

$$d\tau = \frac{1}{6} \varepsilon^3 l_1 l_2 l_3. \quad (2.24)$$

Ecuția impulsului (2.9) aplicată tetraedrului elementar care ocupă domeniul $\Delta(t)$ se scrie

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} \rho \vec{V} d\tau = \iiint_{\Delta(t)} \rho \vec{F}_m d\tau + \iint_{M M_1 M_2 M_3} \vec{T} d\sigma. \quad (2.25)$$

Proiectând relația (2.25) pe axele de coordonate Ox_i se obține

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta(t)} \rho a_i d\tau &= \iiint_{\Delta(t)} \rho F_{mi} d\tau + \iint_{M M_2 M_3} T_{1i} d\sigma + \iint_{M M_3 M_1} T_{2i} d\sigma + \\ &+ \iint_{M M_1 M_2} T_{3i} d\sigma + \iint_{M_1 M_2 M_3} T_i(M, -\vec{n}, t) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se ține seama că,

$$T_i(M, -\vec{n}, t) = -T_i(M, \vec{n}, t). \quad (2.27)$$

Aplicându-se teorema mediei la fiecare integrală se obține

$$\begin{aligned} & \left[(\rho a_i)_{M_i} - (\rho F_{mi})_{M_i} \right] d\tau = \\ & = T_{1i}(M_i^1, t) d\sigma_1 + T_{2i}(M_i^2, t) d\sigma_2 + T_{3i}(M_i^3, t) d\sigma_3 - T_i(M_i^0, \vec{n}, t) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.28)$$

S-a notat cu M_i punctul de medie pentru integrala de volum, cu M_i^1, M_i^2, M_i^3 punctele de medie pentru integralele de suprafață corespunzătoare fețelor laterale ale tetraedrului și cu M_i^0 punctul de medie de pe suprafața $M_1 M_2 M_3$.

Se divid termenii relației (2.28) cu $d\sigma$ și se trece la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$. Rezultă

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(\rho a_i)_{M_i} - (\rho F_{mi})_{M_i} \right] \frac{d\tau}{d\sigma} = 0. \quad (2.29)$$

Când $\varepsilon \rightarrow 0$, punctele $M_i, M_i^1, M_i^2, M_i^3, M_i^0$ tind spre M . Din expresia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[T_{1i}(M_i^1, t) n_1 + T_{2i}(M_i^2, t) n_2 + T_{3i}(M_i^3, t) n_3 - T_i(M_i^0, \vec{n}, t) \right] = 0 \quad (2.30)$$

se obține

$$T_i(M, \vec{n}, t) = \sum_{j=1}^3 T_{ji}(M, t) n_j, \quad (2.31)$$

unde

$$\vec{n}_j = n_j \vec{i}_j. \quad (2.32)$$

Semnificația *teoremei lui Cauchy* este: pentru determinarea tensiunilor în punctul M , corespunzătoare unei direcții \vec{n} este necesar să se

cunoască tensiunile care se exercită în M pe direcțiile paralele axelor de coordonate. Relația (2.31) conduce la relațiile

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= T_{11}\vec{n}_1 + T_{21}\vec{n}_2 + T_{31}\vec{n}_3, \\ \vec{T}_2 &= T_{12}\vec{n}_1 + T_{22}\vec{n}_2 + T_{32}\vec{n}_3, \\ \vec{T}_3 &= T_{13}\vec{n}_1 + T_{23}\vec{n}_2 + T_{33}\vec{n}_3.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Rezultă că vectorii \vec{T}_i sunt funcții liniare de \vec{n}_1, \vec{n}_2 și \vec{n}_3 , coeficienții T_{ij} fiind componentele tensorului tensiunilor.

2.4. Simetria tensorului tensiunilor

Plecând de la proiecția expresiei vectoriale a teoremei momentului cinetic pe cele trei axe Ox_i , ale tetraedrului elementar se poate demonstra că tensorul tensiunilor este simetric, ceea ce înseamnă că din cele nouă componente ale tensorului tensiunilor numai șase sunt distincte.

Se consideră un element fluid de forma unui tetraedru elementar $MM_1M_2M_3$. Fie G_1, G_2, G_3, G centrele de greutate ale fețelor MM_2M_3 , MM_1M_3 , MM_1M_2 , $M_1M_2M_3$ și $\vec{r}_1 = \vec{MG}_1$, $\vec{r}_2 = \vec{MG}_2$, $\vec{r}_3 = \vec{MG}_3$, $\vec{r} = \vec{MG}$ vectorii de poziție față de punctul M (fig. 2.4). Conform ecuației momentului cinetic față de punctul M , neglijând momentele forțelor proporționale cu volumul elementului, se scrie

$$\vec{r}_1 \times \vec{T}_1 d\sigma_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 d\sigma_2 + \vec{r}_3 \times \vec{T}_3 d\sigma_3 - \vec{r} \times \vec{T}_n d\sigma = 0.\tag{2.34}$$

Ținând seama de relația $d\sigma_j = n_j d\sigma$ ($j=1,2,3$) rezultă

$$\vec{r} \times \vec{T}_n = (\vec{r}_1 \times \vec{T}_1)n_1 + (\vec{r}_2 \times \vec{T}_2)n_2 + (\vec{r}_3 \times \vec{T}_3)n_3.\tag{2.35}$$

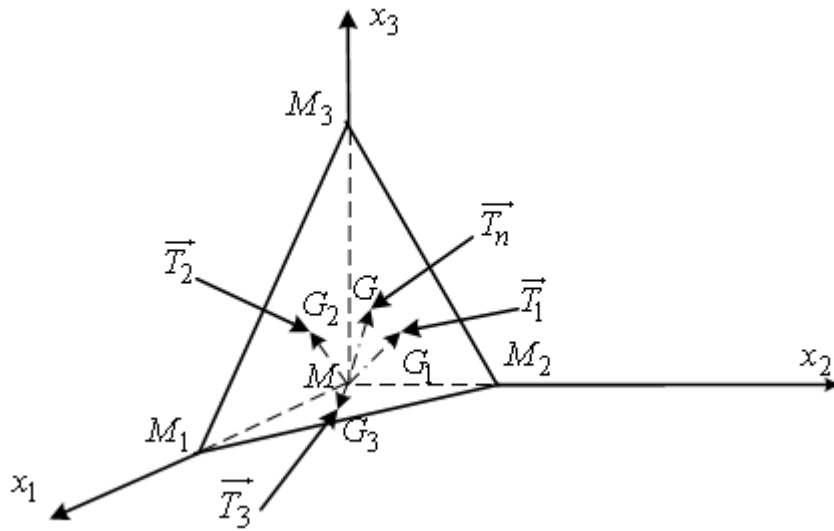


Fig. 2.4. Tensiunile și vectorii de poziție.

Conform teoremei lui Cauchy, tensiunea normală suprafeței $M_1M_2M_3$ este

$$\vec{T}_n = n_1 \vec{T}_1 + n_2 \vec{T}_2 + n_3 \vec{T}_3 \quad (2.36)$$

Se obține

$$\vec{r} \times \vec{T}_n = (\vec{r} \times \vec{T}_1)n_1 + (\vec{r} \times \vec{T}_2)n_2 + (\vec{r} \times \vec{T}_3)n_3. \quad (2.37)$$

Din egalarea relațiilor (2.35) și (2.37) se deduce

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{T}_1 n_1 + (\vec{r} - \vec{r}_2) \times \vec{T}_2 n_2 + (\vec{r} - \vec{r}_3) \times \vec{T}_3 n_3 = 0. \quad (2.38)$$

Deoarece punctele G_1, G_2, G_3 sunt proiecțiile centrului de greutate G pe fețele tetraedrului, atunci

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = x_1 \vec{i}_1, \quad \vec{r} - \vec{r}_2 = x_2 \vec{i}_2, \quad \vec{r} - \vec{r}_3 = x_3 \vec{i}_3 \quad (2.39)$$

și rezultă

$$x_1 \vec{i}_1 \times \vec{T}_1 n_1 + x_2 \vec{i}_2 \times \vec{T}_2 n_2 + x_3 \vec{i}_3 \times \vec{T}_3 n_3 = 0. \quad (2.40)$$

Planul determinat de G_1, G_2 și G_3 este paralel cu planul $M_1M_2M_3$, iar normala la planul $M_1M_2M_3$ este normală și la planul $G_1G_2G_3$; se pot scrie egalitățile

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \vec{n} = \vec{r}_2 \vec{n} = \vec{r}_3 \vec{n} &\Rightarrow (\vec{r} - x_1 \vec{i}_1) \vec{n} = (\vec{r} - x_2 \vec{i}_2) \vec{n} = (\vec{r} - x_3 \vec{i}_3) \vec{n} \Rightarrow \\ x_1 \vec{i}_1 \vec{n} = x_2 \vec{i}_2 \vec{n} = x_3 \vec{i}_3 \vec{n} &\Rightarrow x_1 n_1 = x_2 n_2 = x_3 n_3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

și rezultă

$$\vec{i}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{i}_2 \times \vec{T}_2 + \vec{i}_3 \times \vec{T}_3 = 0, \quad (2.42)$$

adică

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 \times (T_{11} \vec{n}_1 + T_{21} \vec{n}_2 + T_{31} \vec{n}_3) + \vec{i}_2 \times (T_{12} \vec{n}_1 + T_{22} \vec{n}_2 + T_{32} \vec{n}_3) + \\ + \vec{i}_3 \times (T_{13} \vec{n}_1 + T_{23} \vec{n}_2 + T_{33} \vec{n}_3) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Însă $\vec{n}_1 \parallel \vec{i}_1$ $\vec{n}_2 \parallel \vec{i}_2$ $\vec{n}_3 \parallel \vec{i}_3$, sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ este ortogonal și prin urmare

$$T_{21} \vec{i}_3 + T_{31} \vec{i}_2 + T_{12} (-\vec{i}_3) + T_{32} \vec{i}_1 + T_{13} (-\vec{i}_2) + T_{23} (-\vec{i}_1) = 0. \quad (2.44)$$

Se deduc egalitățile

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32}. \quad (2.45)$$

Sub o formă mai compactă relațiile precedente pot fi scrise sub forma

$$T_{ji} = T_{ij}. \quad (2.46)$$

În concluzie, starea de tensiune într-un fluid în repaus este caracterizată prin șase componente, trei tensiuni normale T_{11}, T_{22}, T_{33} și trei tangențiale $T_{12} = T_{21}, T_{13} = T_{31}, T_{23} = T_{32}$.

2.5. Presiunea statică

Într-un fluid în repaus nu se pot crea și nici prelua tensiuni tangențiale. Dacă ar exista tensiuni tangențiale, acestea ar duce la deplasarea particulei, ceea ce contravine ipotezei de repaus a fluidului, prin urmare

$$T_{12} = T_{21} = 0, \quad T_{13} = T_{31} = 0, \quad T_{23} = T_{32} = 0 . \quad (2.47)$$

Vectorul tensiune este în acest caz coliniar cu normala la suprafață,

$$\vec{T}_1 = T_{11} \vec{n}_1, \quad \vec{T}_2 = T_{22} \vec{n}_2, \quad \vec{T}_3 = T_{33} \vec{n}_3 . \quad (2.48)$$

Tensiunile normale sunt de compresiune. În cazul în care această ipoteză nu ar fi adevărată, vectorul tensiune ar tinde să rupă fluidul din interiorul suprafeței de control, ceea ce ar crea goluri și contravine ipotezei continuității mediului. Deoarece suprafața $M_1 M_2 M_3$ pentru care s-a demonstrat teorema lui Cauchy a fost arbitrar aleasă, intensitatea tensiunilor este constantă într-un punct. Valoarea tensiunilor normale este

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p . \quad (2.49)$$

Mărimea p se numește *presiune statică* și este un scalar.

Starea de tensiune într-un fluid în repaus este descrisă prin matricea asociată tensorului tensiunilor

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} . \quad (2.50)$$

Într-un fluid există un câmp scalar al presiunilor $p = p(\vec{r}, t)$. La un fluid în mișcare, presiunea statică reprezintă valorile funcției $p = p(\vec{r}, t)$ în

toate punctele fluidului în mișcare, adică presiunea care s-ar exercita pe o suprafață imobilă în raport cu fluidul.

Unitatea de măsură a presiunii este pascalul (Pa)

$$\langle p \rangle = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} . \quad (2.51)$$

Unități de măsură ale presiunii.

Correspondența unităților de măsură	N/m ² Pa	dyn/cm ² (barye; μbar)	kgf/cm ² at	At (ata)	Torr mm Hg	bar	1m H ₂ O
1 N/m ² =1 Pa	1	10	1,01972 · 10 ⁻⁵	9,869 · 10 ⁻⁶	7,501 · 10 ⁻³	10 ⁻⁵	1,01972 · 10 ⁻⁴
1 dyn/cm ² (barye; μbar)	10 ⁻¹	1	1,01972 · 10 ⁻⁶	9,869 · 10 ⁻⁷	7,501 · 10 ⁻⁴	10 ⁻⁶	1,01972 · 10 ⁻⁵
1 kgf/cm ² =1 at	9,8066 · 10 ⁴	9,8066 · 10 ⁵	1	0,968	735,559	0,981066	10
1 At=760 torr	101 325	1 013 250	1,03323	1	760	1,01325	10,3323
1 Torr (1 mm Hg)	133,322	1 333,22	1,35951 · 10 ⁻³	1,316 · 10 ⁻³	1	1,33322 · 10 ⁻³	0,0135951
1 bar	10 ⁵	10 ⁶	1,01972	0,98769	750,062	1	10,1972
1m H ₂ O	9,8066 · 10 ³	9,8066 · 10 ⁴	0,1	0,0968	73,556	0,0981066	1

Tabelul 2.1.

În tehnică se utilizează și alte unități de măsură. În tabelul 2.1 sunt prezentate câteva dintre cele mai frecvent întâlnite și corespondența dintre ele.

2.6. Ecuațiile lui Cauchy

Ecuațiile se deduc din teorema lui Cauchy scrisă sub formă vectorială $\vec{T}(M, \vec{n}, t) = \sum_{j=1}^3 \vec{T}_j(M, t) n_j$ și reprezintă o formă particulară a teoremei impulsului. Se utilizează formula lui Gauss-Ostrogradski, pentru a transforma integrala pe suprafața $\Sigma(t)$ într-o integrală de volum pe domeniul $\Delta(t)$

$$\iint_{\Sigma(t)} \sum_{j=1}^3 \bar{T} n_j d\sigma = \iiint_{\Delta(t)} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\tau, \quad (2.52)$$

Conform teoremei transportului (4.25), care se va demonstra ulterior (subcap. 4.3.1), pentru $\bar{V}_0 = 0$ are loc egalitatea

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta(t)} \rho \bar{V} d\tau = \iiint_{\Delta(t)} \frac{d}{dt} (\rho \bar{V}) d\tau. \quad (2.53)$$

Înlocuind în teorema impulsului (2.9) se poate scrie

$$\iiint_{\Delta(t)} \left\{ \left(\frac{d\bar{V}}{dt} - \bar{F}_m \right) \rho - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial x_j} \right\} d\tau = 0, \quad \forall \Delta(t) \subset D(t). \quad (2.54)$$

Deoarece domeniul $\Delta(t)$ este un domeniu arbitrar a lui $D(t)$, funcția care figurează sub semnul integralei este identic nulă în orice punct al lui $D(t)$ și rezultă

$$\vec{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}_m + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial x_j}, \quad (2.55)$$

unde \vec{a} este accelerația, \bar{V} - viteza, \bar{F}_m - forța masică exterioară pe unitatea de masă și \bar{T}_j - tensiunile corespunzătoare direcției \vec{i}_j , cu $j=1, 2, 3$. Relația (2.55) reprezintă *ecuația lui Cauchy*. Prin proiecția acestei ecuații pe axele de coordonate, se obțin *ecuațiile lui Cauchy sub formă indicială*,

$$a_i = F_{mi} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3). \quad (2.56)$$

Relațiile (2.55), (2.56) sunt valabile pentru orice mediu continuu și deformabil în mișcare.

2.7. Metode de reprezentare a mișcării: metoda lui Lagrange și metoda lui Euler

Există în general, două moduri de a descrie mișcarea mediilor continue: o descriere lagrangeană și o descriere euleriană.

Metoda lui Lagrange

Pentru a descrie mișcarea unui mediu continuu prin această metodă trebuie să se cunoască mișcarea tuturor particulelor sale. Mișcarea particulei este dată de succesiunea pozițiilor ocupate de particula fluidă.

Fie o particulă materială M care la momentul inițial t_0 are coordonatele (a, b, c) . La momentul t , aceeași particulă are coordonatele (x, y, z) care sunt funcții de timpul t și de a, b, c .

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t). \quad (2.57)$$

Acest mod de descriere a mișcării, urmărind particulele fluide pe traiectoriile lor, definește metoda lui Lagrange. Coordonatele inițiale a, b, c și timpul t sunt variabilele lui Lagrange.

Traectoria unei particule individualizate prin coordonatele inițiale este dată de ecuațiile vectoriale (2.57) sau de ecuațiile

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \quad (2.58)$$

La momentul inițial t_0 relațiile precedente se scriu sub forma

$$x(a, b, c, t_0) = a, \quad y(a, b, c, t_0) = b, \quad z(a, b, c, t_0) = c. \quad (2.59)$$

Viteza particulei fluide individualizate prin vectorul său de poziție la momentul t_0 , $\vec{r}_0 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, este

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(a, b, c, t) \quad . \quad (2.60)$$

Componentele vitezei au expresiile

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (2.61)$$

Accelerațiile au expresia vectorială

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}(a, b, c, t), \quad (2.62)$$

componentele pe cele trei direcții fiind

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (2.63)$$

Metoda lui Lagrange este utilizată mai rar în Mecanica fluidelor, deoarece, în general, pozițiile inițiale ale particulelor nu joacă un rol important. Metoda lui Lagrange se aplică, însă, cu succes, de exemplu în studiul mișcării particulelor fluide individualizate sau al problemelor de propagare a undelor.

Metoda lui Euler

Metoda lui Euler descrie mișcarea fluidelor prin specificarea parametrilor particulelor fluide care trec în timp prin punctele unui domeniu fixat. Avantajul principal al acestei metode îl constituie fixarea atenției asupra câmpurilor din domeniul de curgere: câmpul densității $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, câmpul presiunii $p = p(\vec{r}, t)$, câmpul vitezei $V = V(\vec{r}, t)$ și câmpul temperaturilor $T = T(\vec{r}, t)$. Utilizarea teoriei câmpurilor, ca aparat matematic face ca metoda lui Euler să fie larg folosită în studiul mișcărilor fluidelor.

Câmpul vitezelor la un moment t pentru un punct de coordonate (x, y, z) este dat de relația vectorială

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (2.64)$$

sau, în proiecție pe axele de coordonate, de relațiile

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t). \quad (2.65)$$

O noțiune specifică în Mecanica Fluidelor este derivata totală (sau substanțială sau materială).

Fie $\chi(\vec{r}, t)$ un câmp ce descrie o proprietate a particulelor fluide, cum este densitatea sau viteza. Pentru a aprecia variația în timp a proprietății ce caracterizează particula fluidă care la momentul t se găsește în punctul de coordonate (x, y, z) , se notează cu $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, coordonatele aceleași particule fluide la momentul $t' = t + dt$. Prin definiție derivata totală este

$$\frac{d\chi}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\chi(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \chi(x, y, z, t)}{dt}. \quad (2.66)$$

Dezvoltând în serie Taylor și păstrând numai termenii infinit mici de ordinul I rezultă că

$$\begin{aligned} \chi(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) &= \\ &= \chi(x, y, z, t) + \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Identitatea particulei este definită prin coordonatele sale Lagrange a, b, c . În cazul în care acestea sunt fixate, derivatele parțiale din relația (2.61) pot fi înlocuite astfel

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (2.68)$$

Se obține expresia derivatei totale a câmpului $\chi(x, y, z, t)$,

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} + w \frac{\partial \chi}{\partial z}. \quad (2.69)$$

Principală aplicație a derivatei totale este determinarea câmpurilor accelerațiilor.

Câmpul accelerațiilor este ilustrat de relațiile

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} , \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} , \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.70)$$

sau, sub formă vectorială,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \text{ grad}) \vec{V}. \quad (2.71)$$

Se observă că derivata totală a vitezei este alcătuită din două componente: componenta locală $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ care reprezintă variația în timp a vitezelor particulelor fluide ce trec prin punctul fixat de coordonate (x, y, z) și componenta convectivă $(\vec{V} \text{ grad}) \vec{V}$ care reprezintă variația vitezei la un momentul t fixat, ținând seama că în diferite puncte ale spațiului vitezele sunt diferite.

2.8. Deformarea particulei fluide

Mișcarea unei particule fluide se compune dintr-o translație, o rotație și o deformare liniară și unghiulară.

2.8.1. Determinarea câmpului vitezelor

Se consideră o particulă de fluid în mișcare. Un punct oarecare $M(x, y, z)$ situat în interiorul acestuia este luat drept pol. Fie $M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ un punct infinit vecin. Viteza la momentul t în

punctul $M(x, y, z)$ este $\vec{V}(\vec{r}, t)$ de componente u, v, w , iar în punctul învecinat $M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ la același moment t , viteza este

$$\begin{aligned}\vec{V}' &= \vec{V}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{V}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = \\ &= \vec{V}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \delta z \quad .\end{aligned}\tag{2.72}$$

Componentele vitezei pe cele trei direcții sunt

$$\begin{aligned}u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \quad , \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \quad , \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \quad .\end{aligned}\tag{2.73}$$

Aceste trei relații pot fi scrise sub o formă echivalentă,

$$\begin{aligned}u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z \quad , \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \quad , \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y \quad .\end{aligned}\tag{2.74}$$

Se introduce tensorul antisimetric de ordinul II, numit *tensorul vârtej*, dat de matricea

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Tensorului vârtej i se asociază *vectorul vârtej*

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.76)$$

Legătura între tensorul vârtej și vectorul vârtej este

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

unde

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.78)$$

Se observă că acest tensor este antisimetric și este suficient să se cunoască valorile $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ pentru a-l calcula.

Se introduce tensorul simetric, de ordinul II, numit *tensorul vitezelor de deformare*, dat de matricea

$$\vec{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Tensorul vitezelor de deformare se poate scrie

$$\vec{\overline{D}} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

unde

$$d_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad d_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad d_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$d_{xz} = d_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$d_{yz} = d_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Se precizează că d_{xx} reprezintă viteza de deformare liniară, pe unitatea de lungime, în direcția x , iar $d_{xy} = d_{yx}$ este viteza de deformare unghiulară sau viteza de alunecare în direcțiile ortogonale x și y ; analog se definesc și mărimile d_{yy} , d_{zz} respectiv $d_{yz} = d_{zy}$, $d_{zx} = d_{xz}$.

Tensorul vitezelor de deformare este simetric, așadar este suficient să se cunoască șase componente d_{xx} , d_{yy} , d_{zz} , d_{xy} , d_{xz} , d_{yz} pentru a-l calcula. Tensorului de deformare i se atașează forma pătratică, numită *funcția cuadrică a deformațiilor*

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[d_{xx} (\delta x)^2 + d_{yy} (\delta y)^2 + d_{zz} (\delta z)^2 + 2d_{xy} \delta x \delta y + 2d_{yz} \delta y \delta z + 2d_{zx} \delta z \delta x \right]. \quad (2.81)$$

Se observă că expresiile (2.73-2.74) se scriu condensat

$$\begin{aligned} u' &= u + \omega_y \delta z - \omega_z \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial (\delta x)}, \\ v' &= v + \omega_z \delta x - \omega_x \delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial (\delta y)}, \\ w' &= w + \omega_x \delta y - \omega_y \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial (\delta z)}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Viteza \vec{V}' a punctului M' infinit vecin punctului M are expresia vectorială

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \times \delta \vec{r} + \text{grad } \Phi. \quad (2.83)$$

în care gradientul funcției Φ se calculează în raport cu variabilele $\delta x, \delta y, \delta z$.

2.8.2. Teorema lui Cauchy și Helmholtz

Interpretarea relației (2.83) este dată de teorema lui Cauchy și Helmholtz.

În vecinătatea unui punct $M(\vec{r})$ de viteză \vec{V} , considerat pol, un punct oarecare $M'(\vec{r} + \delta \vec{r})$ infinit apropiat are viteza \vec{V}' compusă din: o viteză de translație egală cu viteza \vec{V} a polului; o viteză de rotație $\vec{\omega} \times \delta \vec{r}$ cu viteza unghiulară $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$ în jurul unei axe instantanee de rotație care trece prin pol; o viteză de deformare egală cu $\text{grad } \Phi$, normala cuadricei $\Phi = \text{const}$, unde funcția cuadricei este

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[d_{xx} (\delta x)^2 + d_{yy} (\delta y)^2 + d_{zz} (\delta z)^2 + 2d_{xy} \delta x \delta y + 2d_{yz} \delta y \delta z + 2d_{zx} \delta z \delta x \right],$$

iar constanta este egală cu valoarea lui Φ atunci când $\delta x, \delta y, \delta z$ corespund punctului M' .

Deoarece relația (2.83) este valabilă pentru toate punctele $M'(\vec{r} + \delta\vec{r})$ situate în apropierea polului $M(\vec{r})$, relația lui Cauchy și Helmholtz poate fi reformulată astfel:

În vecinătatea unui punct aparținând domeniului ocupat de un fluid în mișcare, câmpul vitezelor poate fi considerat ca rezultatul suprapunerii a trei câmpuri de viteze: un câmp corespunzător unei translații rigide, un câmp corespunzător unei rotații rigide în jurul unei axe instantanee care trece prin punctul considerat, un câmp corespunzător unei deformări liniare și unghiulare.

Punctul M' fiind oarecare într-o particulă fluidă, având polul M , rezultă formularea următoare.

Mișcarea unei particule fluide se compune din: o mișcare de translație egală cu viteza \vec{V} a polului $M(\vec{r})$, comună tuturor punctelor $M'(\vec{r} + \delta\vec{r})$ vecine cu M ; o mișcare de rotație de viteză $\vec{\omega} \times \delta\vec{r}$, cu viteza unghiulară $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}$ în jurul unei axe care trece prin M și dintr-o mișcare de deformare de viteză $\text{grad } \Phi$,

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[d_{xx}(\delta x)^2 + d_{yy}(\delta y)^2 + d_{zz}(\delta z)^2 + 2d_{xy}\delta x\delta y + 2d_{yz}\delta y\delta z + 2d_{zx}\delta z\delta x \right],$$

normală cuadrice $\Phi = \text{const}$, constanta fiind egală cu valoarea lui Φ atunci când $\delta x, \delta y, \delta z$ corespund punctului M' (mișcarea de deformare se compune dintr-o mișcare de deformare liniară și o mișcare de deformare unghiulară).

2.9. Ecuația constitutivă

Modul în care se comportă un mediu fluid în prezența acțiunilor exterioare depinde de structura lui. Ecuația Cauchy, care este o ecuație generală, trebuie adaptată în funcție de structura (constituția) mediului. Legile care descriu constituția (structura, comportarea) mediului poartă numele de *ecuații constitutive*. Legile constitutive dau expresia tensorului

\Rightarrow tensiune T și stabilesc legătura dintre mărimile care caracterizează deformarea și tensiunile care apar ca răspuns la deformații.

În general, ecuația constitutivă a fluidelor este reprezentată printr-o relație funcțională între tensorul tensiunilor și tensorul vitezelor de deformare. Prin definiție, fluidele newtoniene sunt acele fluide pentru care ecuația constitutivă este dată de funcția liniară de tipul

$$\vec{T} = A \vec{I} + B \vec{D} , \quad (2.84)$$

în care a și b sunt mărimi scalare, iar \vec{I} este tensorul unitate,

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.85)$$

Se presupune că planele principale ale cuadricei tensiunilor și ale cuadricei vitezelor de deformare relative la orice punct coincid. Se utilizează notațiile Ox , Oy , Oz pentru axele de coordonate și u , v , w pentru componentele vectorului viteză. Se calculează

$$T_{11} = a + b_1 d_{xx} + b_2 d_{yy} + b_3 d_{zz} . \quad (2.86)$$

În cazul echilibrului static, tensiunile se reduc la presiuni. Pentru ca această ipoteză să fie respectată se impune condiția

$$a = -p . \quad (2.87)$$

Fluidul este izotrop, așadar dacă se inversează axele Oy cu Oz valoarea tensiunii nu trebuie să se schimbe și rezultă

$$b_2 = b_3 . \quad (2.88)$$

Expresia (2.86) se scrie succesiv

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p + b_1 d_{xx} + b_2 (d_{yy} + d_{zz}) , \\ T_{11} &= -p + b_2 (d_{xx} + d_{yy} + d_{zz}) + d_{xx} (b_1 - b_2) . \end{aligned} \quad (2.89)$$

Suma elementelor de pe diagonala tensorului tensiunilor este

$$d_{xx} + d_{yy} + d_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V} = \theta . \quad (2.90)$$

Se atribuie constantelor b_1, b_2 valorile $b_2 = \lambda$ și $b_1 - b_2 = 2\eta$, unde η este coeficientul de viscozitate dinamică, iar λ este al doilea coeficient de viscozitate. Deoarece $d_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, rezultă

$$T_{11} = -p + \lambda\theta + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} . \quad (2.91)$$

Similar se deduce

$$T_{22} = -p + \lambda\theta + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} , \quad (2.92)$$

$$T_{33} = -p + \lambda\theta + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (2.93)$$

Pentru ca tensorul tensiunilor \vec{T} să fie o funcție liniară de tensorul vitezelor de deformare \vec{D} , iar relațiile (2.91)-(2.93) să fie respectate este necesar să fie valabile relațiile,

$$A = -p + \lambda\theta \text{ și } B = 2\eta . \quad (2.94)$$

Rezultă

$$\begin{aligned} T_{12} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , & T_{21} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \\ T_{23} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) , & T_{32} &= \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) , \\ T_{13} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) , & T_{31} &= \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Condensat, ecuația constitutivă se scrie

$$\vec{T} = (-p + \lambda \theta) \vec{I} + 2\eta \vec{D} . \quad (2.96)$$

Scriind explicit componentele tensorului vitezelor de deformare (2.76) și ale tensorului unitate (2.85), tensorul tensiunilor se poate scrie, în cazul fluidelor reale ,

$$\vec{T} = \left(-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ 2\eta \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} , \quad (2.97)$$

sau folosind notația indicială,

$$T_{ij} = (-p + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\eta d_{ij} , \quad (2.98)$$

unde δ_{ij} reprezintă simbolul lui Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$ și $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.

2.10. Modele de fluid

Prin *model de fluid* se înțelege o schemă simplificată de fluid în care se consideră fluidul un mediu continuu căruia i se atribuie principalele proprietăți macroscopice ale fluidului real.

În realitate, fluidul este compresibil și vâscos, iar fenomenele reale de mișcare ale fluidelor sunt deosebit de complexe. Pentru o descriere matematică cât mai riguroasă, sunt necesare sisteme de ecuații deosebit de greu de rezolvat, chiar și prin metode aproximative. Din acest motiv se acceptă unele ipoteze simplificatoare, în funcție de cazul concret analizat. Astfel au apărut diverse modele de fluid printre care cele mai frecvent utilizate sunt: fluid ideal (presupune fluidul lipsit de viscozitate), fluid newtonian (modelul respectă legea lui Newton), fluid incompresibil (adekvat descrierii lichidelor), fluide fără greutate (ipoteză acceptabilă în cazul gazelor pentru care forțele de greutate sunt neglijabile în raport cu celelalte forțe). Modelele de fluid pot fi construite și prin suprapunerea mai multor modele simplificatoare.

Capitolul 3

STATICA FLUIDELOR

Statica fluidelor studiază starea de repaus a fluidelor, precum și acțiunile acestora asupra corpurilor fixe cu care vin în contact.

3.1. Ecuațiile lui Euler pentru statica fluidelor

Se consideră ecuația lui Cauchy sub formă vectorială

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{T}_j}{\partial x_j}. \quad (3.1)$$

Viteza fluidului \vec{V} este nulă, iar ecuația constitutivă (2.96) se scrie, în cazul repausului fluidului, sub forma

$$\vec{T} = -p \vec{I} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

unde p este presiunea și \vec{I} tensorul unitate.

Din relația (3.1), ținând seama de observațiile anterioare, se obține ecuația lui Euler sub formă vectorială pentru fluide în repaus

$$\overrightarrow{F_m} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{F_m} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (3.3)$$

unde $p = p(\vec{r}, t)$ este câmpul presiunii și $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ este câmpul densității. Proiectând relația (3.3) pe axele de coordonate Ox , Oy și Oz se obțin ecuațiile lui Euler pentru statica fluidelor,

$$\begin{cases} F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} F_{mx} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ F_{my} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ F_{mz} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Repausul fluidelor nu este posibil pentru orice tip de câmp al forțelor masice exterioare, pe unitatea de masă. Interesează ce condiții trebuie să îndeplinească câmpul forțelor masice $\overrightarrow{F_m}$ pentru a lăsa un fluid în repaus. Se aplică operatorul rotor ambilor termeni ai relației (3.3) și se obține

$$\text{rot}(\rho \overrightarrow{F_m}) = \text{rot}(\text{grad } p). \quad (3.5)$$

Însă $\text{rot}(\text{grad } p) = 0$ și prin urmare

$$\text{grad } \rho \times \overrightarrow{F_m} + \rho \text{rot } \overrightarrow{F_m} = 0. \quad (3.6)$$

Se multiplică scalar relația (3.6) cu $\overrightarrow{F_m}$ și deoarece primul termen este nul, fiind un produs mixt cu vectorul $\overrightarrow{F_m}$ repetat de două ori, se obține

$$\overrightarrow{F_m} \text{rot } \overrightarrow{F_m} = 0. \quad (3.7)$$

Formal condiția (3.7) este îndeplinită dacă

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F_m} = 0. \quad (3.8)$$

Această condiție este suficientă fără a fi și necesară. În cazul fluidelor incompresibile sau compresibile barotrope, $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \int \frac{dp}{\rho}$ și ecuația Euler (3.3) devine $\overrightarrow{F_m} = \operatorname{grad} \int \frac{dp}{\rho}$, câmpul forțelor masice fiind un câmp potențial sau irotațional. Prin urmare:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un câmp de forțe masice exterioare pe unitatea de masă să lase un fluid incompresibil sau compresibil barotrop în repaus este ca acest câmp să fie potențial (irotațional)

$$\overrightarrow{F_m} = -\operatorname{grad} U_m, \quad (3.9)$$

unde $U_m = U_m(x, y, z)$ se numește potențialul forțelor masice exterioare, pe unitatea de masă.

3.2 Relația fundamentală a staticii fluidelor și formele sale

Relația fundamentală a staticii fluidelor se obține din ecuația vectorială de repaus a fluidelor. Se consideră potențialul forțelor masice exterioare $U_m = U_m(x, y, z)$ care îndeplinește condiția $\overrightarrow{F_m} = -\operatorname{grad} U_m$. Se înlocuiește această expresie în ecuația Euler (3.3). Rezultă

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} U_m = 0. \quad (3.10)$$

Se înmulțește scalar această expresie cu $d\vec{r}$ și se obține

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \, d\vec{r} + \operatorname{grad} U_m \, d\vec{r} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho} dp + dU_m = 0, \quad (3.11)$$

relația fundamentală a staticii fluidelor sub formă diferențială. Prin integrarea expresiei se obține *relația fundamentală a staticii fluidelor sub formă integrală*,

$$\int \frac{dp}{\rho} + U_m = const . \quad (3.12)$$

Cele mai importante aplicații tehnice din statica fluidelor utilizează forme particulare ale acestei expresii.

Repausul fluidelor incompresibile

În realitate, toate fluidele sunt compresibile. În cazul lichidelor, deoarece pentru o plajă destul de largă de presiuni creșterea densității odată cu creșterea presiunii este nesemnificativă, se poate accepta ipoteza că fluidul este incompresibil $\rho = const$ și rezultă

$$\frac{p}{\rho} + U_m = const \quad \text{sau} \quad p + \rho U_m = const , \quad (3.13)$$

relația fundamentală a hidrostaticii.

Repausul izoterm al fluidelor compresibile

Din legea gazelor perfecte (relația 1.8), $p/\rho = RT$, se deduce $p/\rho = p_0/\rho_0$. S-a notat cu p_0 presiunea, respectiv cu ρ_0 densitatea în condiții standard (de referință). Ținând seama că

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0} d\rho \quad \text{și} \quad \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \rho + const , \quad (3.14)$$

relația (3.12) devine,

$$\frac{p_0}{\rho_0} \ln \rho + U_m = const \quad \text{sau} \quad \frac{p_0}{\rho_0} \ln \left(\frac{\rho_0}{p_0} p \right) + U_m = const . \quad (3.15)$$

Pentru a fi realizată condiția $T=const$ sunt necesare presiuni mici, deoarece în cazul comprimării la presiuni mari nu este posibilă evacuarea teoretic instantanee a căldurii dezvoltate în fluid.

Repausul adiabatic al fluidelor compresibile

În cazul repausului adiabatic $p/\rho^k = p_0/\rho_0^k$ unde k este exponentul adiabatic, ținând seama că

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} d\rho \quad \text{și} \quad \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \int \rho^{k-2} d\rho = \frac{p_0}{\rho_0^k} \frac{k}{k-1} \rho^{k-1} + const, \quad (3.16)$$

se obține

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} + U_m = const \quad \text{sau} \quad \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} + U_m = const. \quad (3.17)$$

Repausul adiabatic se realizează pentru un gaz perfect izolat, fără schimb de căldură cu exteriorul.

Repausul politropic al fluidelor compresibile

În cazul repausului politropic $p/\rho^n = p_0/\rho_0^n$ unde n este exponentul politropic, relația (3.12) devine

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} + U_m = const \quad \text{sau} \quad \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} + U_m = const. \quad (3.18)$$

Repausul politropic se realizează pentru un gaz care nu este nici perfect izolat, nici perfect răcit. Căldura dezvoltată prin comprimare este parțial evacuată în exterior.

Statica atmosferei consideră repausul aerului politropic în troposferă și izoterm în stratosferă. Se apreciază că troposfera se află la înălțimi sub 11 000 m, iar stratosfera la altitudini de peste 11 000 m până la sute de kilometri.

3.3. Consecințe ale relației fundamentale a staticii fluidelor

1. *Într-un fluid în repaus suprafețele echipotențiale sunt suprafețe izobare și reciproc.* Această afirmație este justificată de relațiile (3.13) - (3.18), cea de a doua formulare.

2. *Într-un fluid în repaus suprafețele echipotențiale sunt și suprafețe izodense; reciproca nu este totdeauna adevărată.* Prima parte a consecinței rezultă din relațiile (3.13) - (3.18), prima formulare. A doua parte este confirmată de existența fluidelor incompresibile (în care orice suprafață este izodensă).

3. *Într-un fluid în repaus suprafețele echipotențiale sunt suprafețe izoterme; reciproca nu este întotdeauna adevărată.* Din ecuația de stare $p/\rho = RT$, se obține $T = p/(\rho R)$ și ținând seama de primele două consecințe, prima parte a acestei teoreme este dovedită. A doua parte se justifică dacă se ține seama că se pot imagina fluide având aceeași temperatură în toate punctele.

4. *Într-un fluid în repaus suprafețele echipotențiale nu se intersectează.* Demonstrația se efectuează prin reducere la absurd. Dacă ar exista un punct de intersecție atunci presiunea ar avea două valori în acel punct.

5. *Într-un fluid în repaus forța masică care acționează asupra unei particule fluide este normală la suprafața echipotențială care conține această particulă și este îndreptată în sensul scăderii potențialului, deci în sensul creșterii presiunii.* Din condiția $\vec{F}_m = -\text{grad}U_m$ rezultă că \vec{F}_m și normala la suprafața echipotențială sunt vectori coliniari și de sensuri contrare. La o descreștere a potențialului corespunde o creștere a presiunii, în conformitate cu relațiile (3.13 - 3.18).

6. *Suprafața de separație dintre două fluide imiscibile în repaus este o suprafață echipotențială.* Între două puncte infinit vecine de pe suprafața de separație a două fluide diferența de presiune este $dp = -\rho_1 dU_m = -\rho_2 dU_m$, deci $(\rho_1 - \rho_2)dU_m = 0$. Ținând seama că $\rho_1 \neq \rho_2$ se obține $dU_m = 0$ sau $U_m = \text{const.}$

7. Într-un fluid în repaus în care forțele masice sunt neglijabile în raport cu cele de presiune, presiunea este practic aceeași în toată masa fluidului (principiul lui Pascal). Din ecuația lui Euler $(\text{grad } p)/\rho = \overrightarrow{F_m}$, rezultă că pentru $\overrightarrow{F_m} \cong 0$ se obține $\text{grad } p \cong 0$, prin urmare $p \cong \text{const}$.

Aplicația 3.1

Se consideră că în troposferă repausul aerului este politropic. Deoarece, în câmpul gravitațional potențialul forțelor masice este $U_m = gz + \text{const}$, să se determine expresia variației presiunii și densității cu altitudinea.

Soluție

Expresiile (3.18) sunt în acest caz,

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} + gz = \text{const}, \quad \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} + gz = \text{const}.$$

Se aplică aceste relații între un punct la nivelul mării (p_0, ρ_0, z_0) și un punct din troposferă (p, ρ, z) , la altitudinea $h = z - z_0$. Neglijând variația accelerației gravitaționale cu altitudinea, rezultă

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} + gz_0 = \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} + gz,$$

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} + gz_0 = \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} + gz.$$

Se obțin variațiile masei volumice și presiunii cu altitudinea,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{p_0} gh \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{p_0} gh \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Înlocuind $n=1,235$, $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,2255\text{ kg/m}^3$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$ rezultă

$$\rho = 1,2255 \cdot \left(1 - 0,2577 \cdot 10^{-4} h\right)^{4,2553} \text{ kg/m}^3 ,$$

$$p = 101\,325 \cdot \left(1 - 0,22577 \cdot 10^{-4} h\right)^{5,2553} \text{ Pa} .$$

Aplicația 3.2

O presă hidraulică are dimensiunile $l_1 = 30\text{ cm}$, $l_2 = 3\text{ cm}$, $d_1 = 1\text{ cm}$, $d_2 = 5\text{ cm}$ (fig. 3.1). Dacă se aplică o forță \vec{F} având modulul de 100 N , pe mânerul pârghiei presei, să se determine modulul forței de presare \vec{F}_2 care se obține.

Soluție

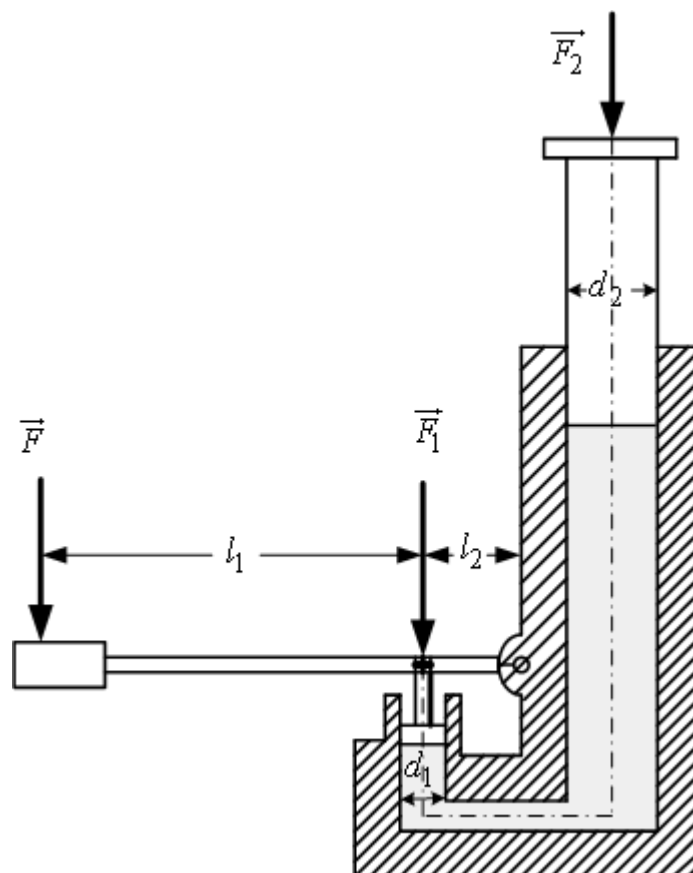


Fig. 3.1. Presa hidraulică.

Din legea pârghiei $(l_1 + l_2)F = l_2 F_1$, se calculează mărimea forței F_1 care apare pe pistonul mic,

$$F_1 = \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) F.$$

Conform principiului lui Pascal $p_1 = p_2$ și rezultă $\frac{4F_1}{\pi d_1^2} = \frac{4F_2}{\pi d_2^2}$ sau

$$F_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} F_1 = \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 F,$$

$$F_2 = \left(1 + \frac{0,3}{0,03}\right) \left(\frac{0,05}{0,01}\right)^2 \cdot 100 = 27\,500 \text{ N} = 27,5 \text{ kN}.$$

Se constată o amplificare a forței aplicate de 275 ori.

3.4. Statica fluidelor în câmpul gravitațional

3.4.1. Relația fundamentală a staticii fluidelor în câmpul gravitațional

Fie un sistem de axe $Oxyz$ în care axa Oz este verticală, cu sensul pozitiv în sus. Asupra unui fluid în repaus în câmpul gravitațional terestru acționează forțele masice de greutate. Componentele forței masice exterioare pe unitatea de masă au valorile

$$F_{mx} = 0, \quad F_{my} = 0, \quad F_{mz} = -g \quad (3.19)$$

și, prin urmare, forța masică are expresia vectorială

$$\overrightarrow{F_m} = -g \vec{k} , \quad (3.20)$$

unde g este mărimea accelerației gravitaționale, iar \vec{k} este versorul axei Oz a triedrului triortogonal $Oxyz$. Expresia diferențială a potențialului forței masice exterioare, pe unitatea de masă, este

$$dU_m = -(-g)dz = g dz \quad (3.21)$$

și rezultă

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz = const , \quad (3.22)$$

forma integrală a relației fundamentale a staticii fluidelor în câmpul gravitațional.

3.4.2. Relația fundamentală a hidrostaticii

Dacă fluidul este incompresibil, atunci $\rho = const$. Lichidele sunt considerate fluide incompresibile. Din relația (3.22) se obține *relația fundamentală a hidrostaticii*

$$p + \rho g z = const . \quad (3.23)$$

Interpretare grafică (verificare experimentală)

Se împart toți termenii relației (3.23) la greutatea specifică $\gamma = \rho g$. Se obține o relație ai cărei termeni au dimensiuni de lungime,

$$\frac{p}{\gamma} + z = H_{abs} . \quad (3.24)$$

Termenii acestei relații reprezintă: H_{abs} - *sarcina hidrostatică corespunzătoare presiunii absolute (sarcină barometrică)*, $\frac{p}{\gamma}$ - *înălțimea piezometrică corespunzătoare presiunii absolute*, z - *înălțimea (cota) geometrică*.

Pentru fluide incompresibile, sarcina absolută este aceeași în toate punctele fluidului. Experimental acest lucru poate fi pus în evidență cu

ajutorul unui rezervor închis ce conține un lichid, a cărei suprafață liberă este supusă la o presiune mai mare decât cea atmosferică (fig.3.1), și o serie de tuburi din sticlă. Se utilizează tuburi barometrice (închise la capătul superior) pentru măsurarea *presiunii absolute* în raport cu presiunea de referință zero, vidul absolut, și tuburi piezometrice (deschise la partea superioară) pentru măsurarea *presiunii relative* în raport cu presiunea de referință, cea atmosferică. Dacă presiunea relativă $p - p_{at}$ este pozitivă, atunci ea se numește *presiune manometrică* $p_m = p - p_{at}$, iar dacă este negativă, se definește *presiunea vacuometrică* $p_v = p_{at} - p$.

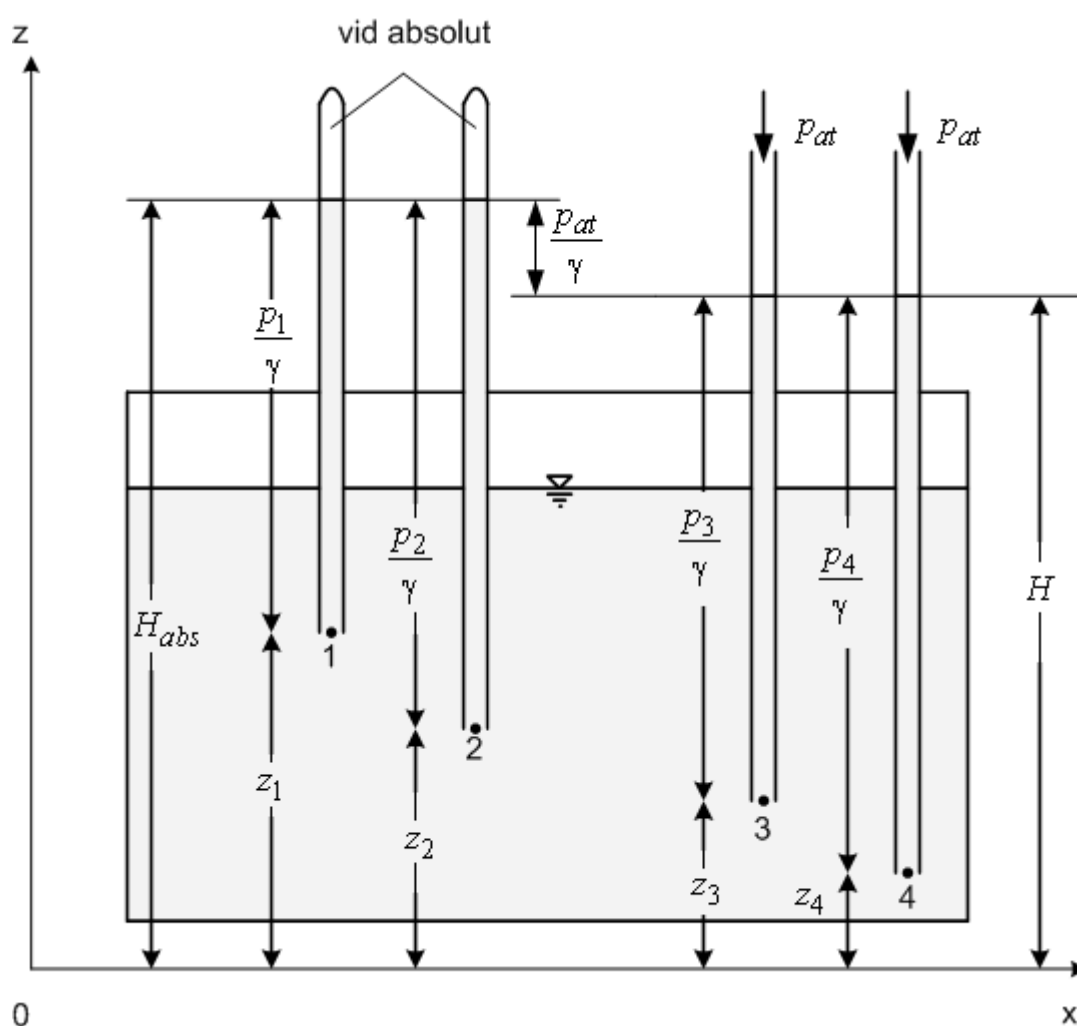


Fig. 3.2. Interpretarea grafică (verificarea experimentală) a relației fundamentale a staticii fluidelor în câmpul gravitațional.

Plasând două tuburi barometrice în două puncte diferite, se constată

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = H_{abs} . \quad (3.25)$$

Dacă se plasează două tuburi piezometrice în două puncte diferite, se poate scrie

$$\frac{p_3 - p_{at}}{\gamma} + z_3 = \frac{p_4 - p_{at}}{\gamma} + z_4 = H , \quad (3.26)$$

unde H reprezintă *sarcina hidrostatică corespunzătoare presiunii relative*.

Relația (3.26) poate fi dedusă din relația (3.24). Dacă din ambii termeni ai relației (3.25) se scade înălțimea corespunzătoare presiunii atmosferice $\frac{p_{at}}{\gamma}$ se obține

$$\frac{p - p_{at}}{\gamma} + z = H , \quad H = const . \quad (3.27)$$

Interpretare energetică

Se înmulțește relația (3.23) cu volumul $V = m/\rho$ al unei particule de fluid de masă m , având centrul de masă în punctul curent de cotă z pentru care a fost scrisă relația (3.23),

$$Vp + mgz = E \quad E = const . \quad (3.28)$$

Termenii acestei relații au următoarea interpretare: Vp reprezintă energia potențială de presiune, mgz - energia potențială de poziție, E - energia potențială totală a unei particule de fluid.

Se observă că relația fundamentală a hidrostaticii reprezintă o exprimare matematică a principiului conservării energiei (energia potențială totală are aceeași valoare în toate punctele fluidului în repaus).

Procedând analog ca în subcapitolul 3.3 se pot deduce *consecințele relației fundamentale a hidrostaticii*.

Consecințe

1. Într-un lichid în repaus planele orizontale sunt suprafețe izobare și reciproc. Aceasta este *lema fundamentală a hidrostaticii* și are drept consecințe *principiul suprafeței libere* (suprafața liberă a unui lichid în

repaus este plană și orizontală) și *principiul vaselor comunicante* (suprafețele libere în diferite vase care comunică între ele și care conțin un lichid în repaus sunt situate într-un același plan orizontal).

2. *Într-un lichid în repaus planele orizontale sunt suprafețe izodense; reciproca nu este în general adevărată.*

3. *Într-un lichid în repaus planele orizontale sunt suprafețe izoterme; reciproca nu este în general adevărată.*

4. *Într-un lichid în repaus forța masică (de greutate) care acționează asupra unei particule este dirijată în sensul scăderii cotei, deci în sensul creșterii presiunii.*

5. *Într-un lichid în repaus în care forțele de greutate sunt neglijabile în raport cu forțele de presiune, presiunea este (practic) aceeași în toate punctele lichidului (principiul lui Pascal).*

6. *Suprafața de separație dintre două lichide imiscibile în repaus este un plan orizontal.*

Legea de repartitie a presiunilor în interiorul unui lichid în repaus poate fi dedusă pe baza relației fundamentale a hidrostaticii (3.23) pentru un punct O situat pe suprafața liberă a lichidului și un punct M din interiorul lichidului

$$p_0 + \rho g z_0 = p_M + \rho g z_M, \quad (3.29)$$

unde p_0 este presiunea la suprafața liberă a lichidului, egală sau nu cu presiunea atmosferică. Dacă se notează cu $h = z_0 - z_M$ adâncimea punctului M , atunci rezultă

$$p_M = p_0 + \rho g h; \quad (3.30)$$

presiunea într-un lichid crește liniar cu adâncimea h .

Pentru două puncte oarecare M și N din interiorul unui lichid în repaus aflate la o diferență de nivel h ,

$$p_M = p_N + \rho g h \quad \text{sau} \quad p_M - p_N = \rho g h, \quad (3.31)$$

dacă se consideră punctul M la o adâncime mai mare decât N . Diferența de presiune dintre două puncte ale unui lichid în repaus este egală cu greutatea unui cilindru de lichid având ca arie a secțiunii sale ortogonale unitatea de suprafață și ca înălțime diferența de nivel dintre cele două puncte (*principiul fundamental al hidrostaticii*).

3.5. Repausul relativ al lichidelor în câmpul gravitațional

Un lichid aflat într-un rezervor este în *repaus relativ*, dacă particulele sale sunt în repaus în raport cu un sistem de referință mobil legat de rezervor. Față de un sistem de referință oarecare fix, lichidul se deplasează solidar cu rezervorul.

Situația poate să apară când rezervorul nu se deplasează cu viteză uniformă, ci este antrenat într-o mișcare rectilinie uniform accelerată sau într-o mișcare de rotație. Sub acțiunea forțelor de inerție, apărute în plus față de forțele masice deja existente, particulele fluide își modifică poziția. După un anumit timp, dacă forțele de inerție rămân constante în timp, lichidul ocupă o nouă poziție de repaus în raport cu pereții recipientului.

O particulă oarecare de lichid are viteza absolută \vec{V}_a și accelerația absolută \vec{a}_a în raport cu sistemul de axe fix și viteza relativă \vec{V}_r și accelerația relativă \vec{a}_r în raport cu sistemul mobil. Între aceste valori există relația

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_t \quad (3.32)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C \quad (3.33)$$

unde \vec{V}_t și \vec{a}_t sunt viteza și accelerația de transport a originii sistemului mobil față de sistemul fix și $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ este accelerația lui Coriolis. În cazul repausului relativ, viteza și respectiv accelerația relativă sunt nule, iar accelerația lui Coriolis este de asemenea egală cu zero. Accelerația absolută a lichidului din rezervor este egală cu accelerația de transport a sistemului de referință mobil în raport cu sistemul fix,

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t. \quad (3.34)$$

Se scrie ecuația lui Cauchy, cu ecuația constitutivă $\vec{T} = -p \vec{I}$ și se obține expresia accelerației absolute a fluidului

$$\vec{a}_a = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (3.35)$$

Ținând seama de relația (3.34) se deduce

$$\vec{a}_t = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{F}_m - \vec{a}_t . \quad (3.36)$$

Aplicând operatorul rotor expresiei (3.36) se observă că pentru un fluid incompresibil în câmpul gravitațional $1/\rho [\text{rot}(\text{grad } p)] = 0$ și $\text{rot}(\vec{F}_m) = \text{rot}(-g\vec{k}) = 0$, deci

$$\text{rot}(\vec{a}_t) = 0 \quad (3.37)$$

câmpul forțelor de inerție este irotațional. În concluzie, forța de inerție poate fi exprimă cu ajutorul câmpurilor potențiale $\vec{F}_i = \text{grad } U_i$, cu $U_i(x, y, z)$ potențialul forțelor de inerție pe unitatea de masă. Deoarece, se consideră câmpul forțelor masice potențial $\vec{F}_m = -\text{grad } U_m$, expresia (3.36) devine

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } U_m - \text{grad } U_i \quad (3.38)$$

Pentru simplitate se poate utiliza noțiunea de potențial total

$$U_T = U_m + U_i \quad (3.39)$$

și se obține ecuația vectorială a repausului relativ

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } U_T \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{grad } U_T = 0 . \quad (3.40)$$

Potențialul total poate fi descris prin intermediul componentelor forțelor pe direcțiile axelor de coordonate,

$$U_T = - \int \left[(F_{mx} + F_{ix}) dx + (F_{my} + F_{iy}) dy + (F_{mz} + F_{iz}) dz \right]. \quad (3.41)$$

În cazul lichidelor (fluide incompresibile, $\rho = \text{const}$) se obține relația fundamentală a repausului relativ,

$$p + \rho U_T = \text{const}. \quad (3.42)$$

Interesează forma suprafeței libere și repartitia presiunilor în interiorul lichidului și pe pereții rezervorului, probleme care pot fi rezolvate prin stabilirea expresiei potențialului total al forțelor masice exterioare, pe unitatea de masă, și al forțelor de inerție, pe unitatea de masă.

Repausul relativ de al unui lichid dintr-un recipient ce se deplasează cu accelerație constantă

Se consideră un rezervor prismatic de lungime b , ce conține un lichid de masă volumică ρ , până la cota h . La un moment dat, rezervorul începe să se deplaseze uniform accelerat, cu accelerația constantă \vec{a} , pe un plan orizontal. Se constată că suprafața liberă a lichidului, care înainte de începerea mișcării era orizontală, se înclină (fig. 3.3).

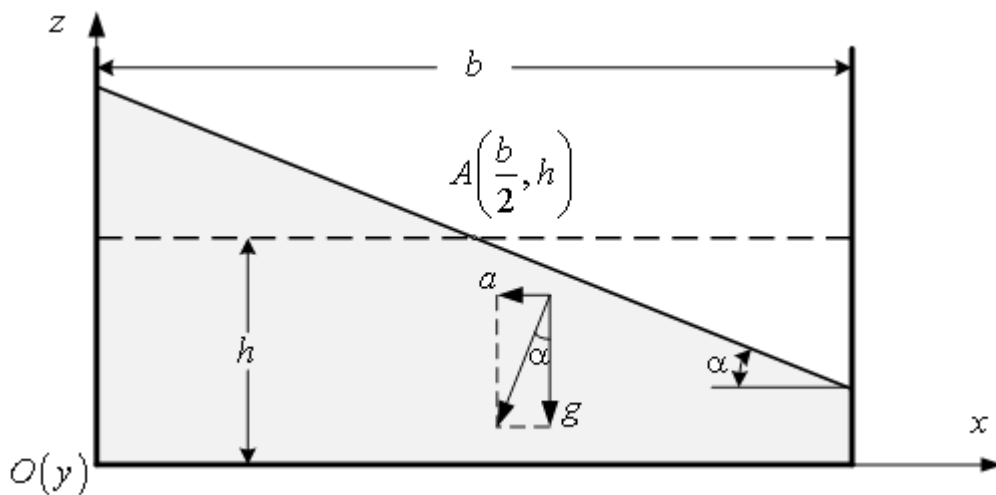


Fig. 3.3. Rezervor în translație orizontală cu accelerație constantă.

În acest caz componentele forței masice exterioare pe unitatea de masă sunt $F_{mx} = 0$, $F_{my} = 0$, $F_{mz} = -g$ și cele ale forței de inerție, pe unitatea de masă sunt $F_{ix} = -a$, $F_{iy} = 0$, $F_{iz} = 0$. Potențialul total se calculează cu relația (3.41),

$$U_T = - \int [-a dx - g dz] = ax + gz + C . \quad (3.43)$$

Relația fundamentală a repausului relativ pentru fluide incompresibile (3.42) devine

$$p + \rho(ax + gz + C) = \text{const} . \quad (3.44)$$

Pentru determinarea constantei, se scrie relația (3.44) pentru punctul $A\left(\frac{b}{2}, h\right)$ situat pe suprafața liberă, punct ce-și conservă în timpul repausului relativ poziția avută în repausul absolut, dacă volumul de apă din rezervor se conservă,

$$p_0 + \rho\left(a\frac{b}{2} + gh + C\right) = \text{const} . \quad (3.45)$$

Egalând expresiile (3.44) și (3.45) se deduce relația fundamentală a repausului relativ al unui lichid aflat într-un rezervor în translație orizontală uniform accelerată

$$p + \rho(ax + gz) = p_0 + \rho\left(a\frac{b}{2} + gh\right) . \quad (3.46)$$

Relația permite determinarea presiunii în orice punct din interiorul rezervorului sau de pe pereții acestuia. Suprafața liberă fiind o suprafață izobară, $p = p_{at}$, este o suprafață echipotențială de ecuație $U_T = \text{const}$. sau, ținând seama de expresia (3.43), $ax + gz = C_1$. Constanta C_1 se determină impunând ca punctul $A\left(\frac{b}{2}, h\right)$ să verifice această ecuație. Ecuația suprafeței libere este planul de ecuație

$$a\left(x - \frac{b}{2}\right) + g(z - h) = 0 , \quad (3.47)$$

a cărui înclinare este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} . \quad (3.48)$$

Tangenta trigonometrică a unghiului de înclinare este proporțională cu mărimea accelerației, unghiul de înclinare menținându-se constant cât timp accelerația este constantă.

Repausul relativ al unui lichid aflat într-un rezervor în rotație

Se consideră un rezervor cilindric circular de rază R , ce conține un lichid de masă volumică ρ , până la cota h_0 . Dacă rezervorului i se imprimă o mișcare de rotație în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$, se constată că lichidul intră în mișcare de rotație cu aceeași viteză unghiulară și suprafața liberă, inițial plană, devine un paraboloid de revoluție care se menține cât timp viteza unghiulară nu variază.

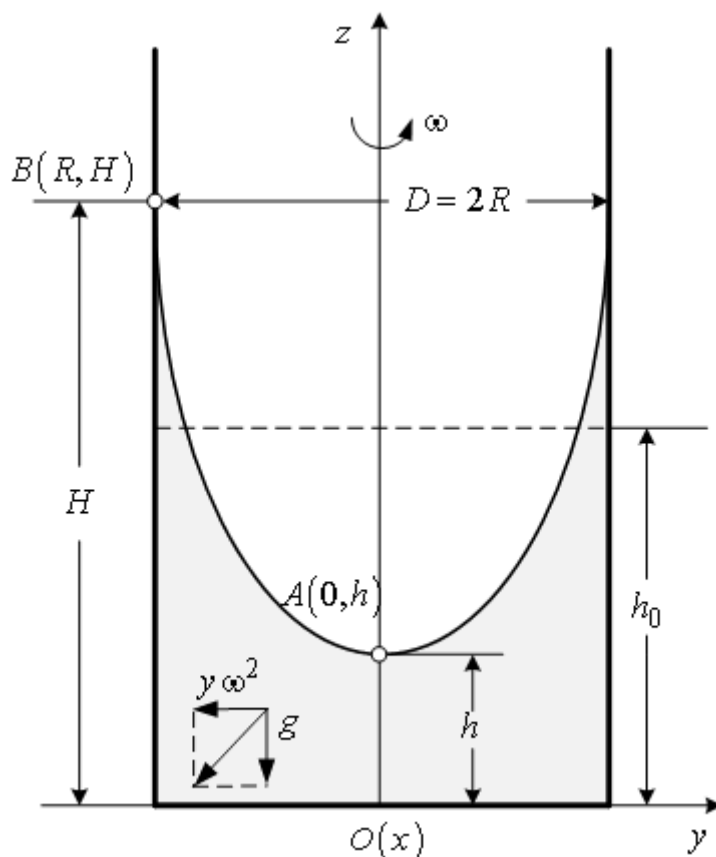


Fig. 3.4. Rezervor în mișcare de rotație uniformă.

Componentele forței masice pe unitatea de masă sunt $F_{mx} = 0$, $F_{my} = 0$, $F_{mz} = -g$, iar ale forței de inerție pe unitatea de masă, $F_{ix} = \omega^2 x$, $F_{iy} = \omega^2 y$, $F_{iz} = 0$. Se determină potențialul total

$$U_T = - \iint [\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz] = -\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + gz + C_1 = -\omega^2 \frac{r^2}{2} + gz + C_1. \quad (3.49)$$

Suprafețele echipotențiale $U_T = \text{const}$ pot fi scrise sub forma

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C_2. \quad (3.50)$$

Printre aceste suprafețe se găsește și suprafața liberă. Se consideră punctul A de coordonate $r = 0$, $z = h$ și punctul B de coordonate $r = R$, $z = H$, situate pe suprafața liberă și din ecuația (3.48) rezultă $h = C_2$ și $H = \omega^2 R^2 / (2g) + C_2$ sau

$$H - h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}. \quad (3.51)$$

O altă relație între cota H corespunzătoare nivelului maxim al lichidului la perete și cota h corespunzătoare nivelului minim al lichidului, pentru o viteză de rotație dată, se determină din egalarea volumului corespunzător repausului absolut cu volumul corespunzător repausului relativ,

$$\pi R^2 h_0 = \pi R^2 H - \pi R^2 (H - h) / 2, \quad (3.52)$$

ceea ce implică

$$H + h = 2h_0. \quad (3.53)$$

Relațiile (3.51) și (3.53) pot fi privite ca un sistem de două ecuații din care rezultă necunoscutele h și H ,

$$h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \quad H = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} . \quad (3.54)$$

Revenind la relația (3.48), în care se consideră $C_2 = h = h_0 - \omega^2 R^2 / (4g)$, se obține ecuația suprafeței libere

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h_0 . \quad (3.55)$$

Relația fundamentală a repausului relativ pentru fluide incompresibile (3.42) devine

$$p + \rho \left(-\frac{\omega^2 r^2}{2} + gz \right) = C_3 . \quad (3.56)$$

Constanta de integrare C_3 se determină scriind că în punctul A de coordonate $r = 0$ și $z = h$ situat pe suprafața liberă, presiunea este $p = p_0$ (egală, în general cu presiunea atmosferică $p_0 = p_{at}$),

$$C_3 = p_0 + \rho gh = p_0 + \rho g \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) . \quad (3.57)$$

Relația fundamentală a repausului relativ al unui lichid dintr-un rezervor cilindric circular în mișcare de rotație uniformă este

$$p + \rho g \left(z - \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) = p_0 + \rho g \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) . \quad (3.58)$$

Relația (3.58) permite determinarea presiunilor în orice punct din interiorul rezervorului sau de pe pereții acestuia.

3.6. Aparate pentru măsurarea presiunii bazate pe principiile staticii fluidelor

Piezometrul constă dintr-un tub transparent racordat la rezervorul cu lichid, într-un punct în care trebuie măsurată presiunea. Capătul superior poate fi deschis, caz în care se măsoară presiunea relativă sau închis pentru măsurarea presiunii absolute. Piezometrul deschis se mai numește și *tub manometric*, iar piezometrul închis se numește *tub barometric*.

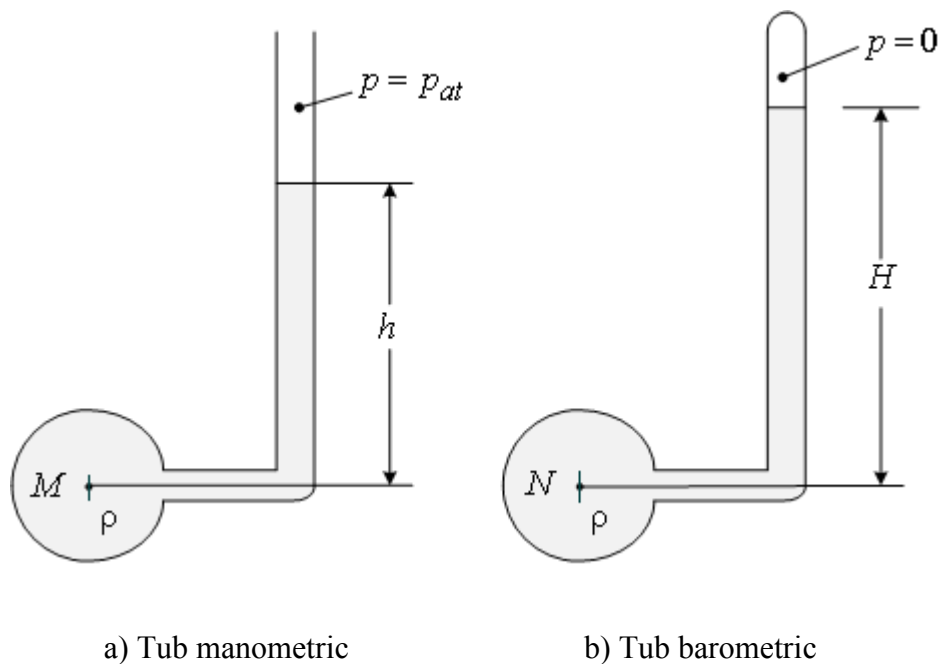


Fig. 3.5. Piezometre.

Presiunea relativă în punctul M depinde de înălțimea h a coloanei de lichid,

$$p_M - p_{at} = \rho g h. \quad (3.59)$$

Măsurarea presiunii absolute în punctul N cu tubul barometric,

$$p_N = \rho g H, \quad (3.60)$$

necesită un tub suficient de lung pentru ca la partea superioară să rămână un spațiu vid.

Domeniul de măsurare al tubului piezometric este limitat. De exemplu, atunci când lichidul din tub este apa domeniul de măsurare este $(10 - 2 \cdot 10^4) \text{ Pa}$.

Manometrul în forma literei U utilizează o coloană de lichid pentru măsurarea presiunii relative. Se determină presiunea relativă în punctul M , cu notațiile din figura 3.6,

$$p_M + \rho_1 g h_1 = p_{at} + \rho_2 g h_2, \text{ deci}$$

$$p_M - p_{at} = g(\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1). \quad (3.61)$$

S-a presupus că lichidele de densități ρ_1 și ρ_2 sunt imiscibile.

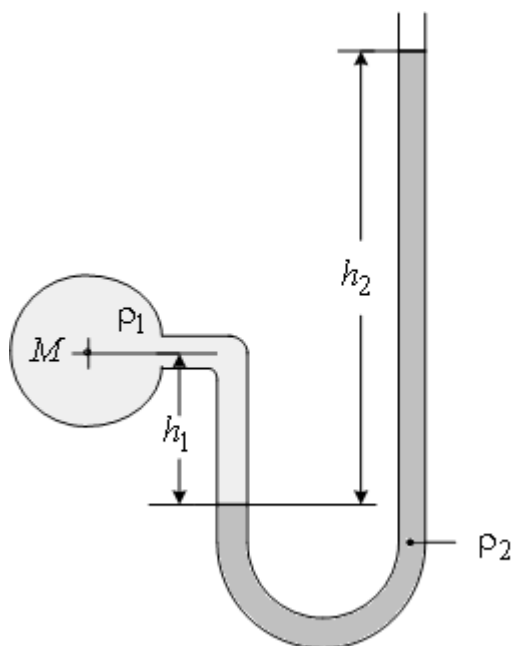


Fig. 3.6. Manometru în formă de U.

Dacă fluidul din rezervor este un gaz cu densitatea ρ_1 , se consideră greutatea coloanei de gaz neglijabilă în raport cu cea a lichidului din tub de densitate ρ_2 (apă, mercur, alcool) și se obține

$$p_M - p_{at} = \rho_2 g h_2. \quad (3.62)$$

Manometrul diferențial este format dintr-un tub în forma literei U, ce conține un lichid de lucru (mercur, apă, alcool). Interesează valoarea

diferenței de presiune dintre cele două rezervoare la care este racordat instrumentul. În figura 3.7 se prezintă un manometru diferențial cu brațe inegale.

Pentru a determina diferența de presiune între punctul A și punctul B se determină presiunea pentru punctele E și D , situate în același plan orizontal (izobar),

$$p_E = p_A + \rho_1 g(h + b), \quad (3.63)$$

$$p_D = p_B + \rho_2 g(a + b) + \rho_3 g h. \quad (3.64)$$

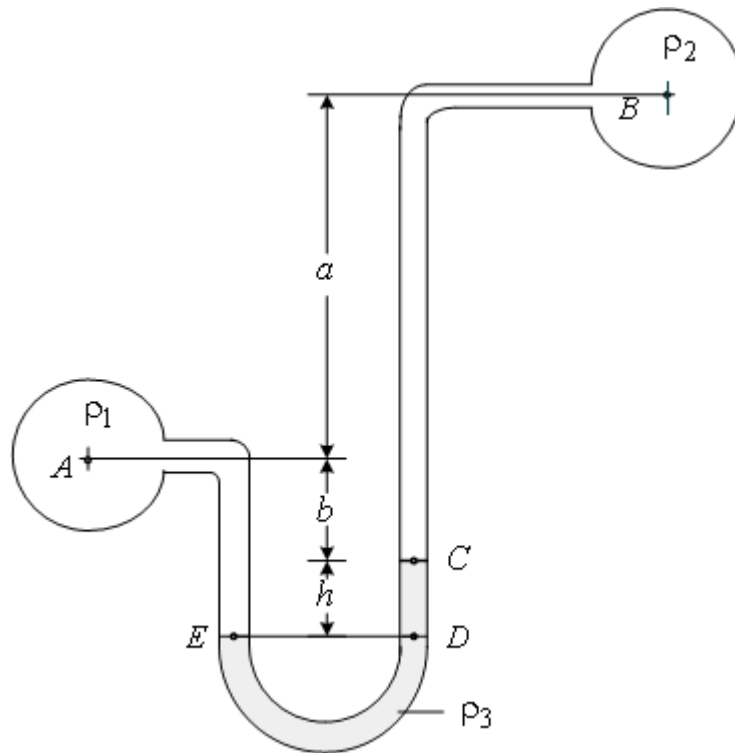


Fig. 3.7. Manometru diferențial.

Din condiția $p_E = p_D$ rezultă

$$p_A - p_B = \rho_2 g(a + b) - \rho_1 g(h + b) + \rho_3 g h. \quad (3.65)$$

S-a presupus că lichidele în contact sunt imiscibile.

Aplicația 3.3.

Să se determine diferența de presiune între rezervoarele A și B conectate la un manometru diferențial cu mercur (fig. 3.7). Se vor analiza cazurile:

- a) rezervoarele A și B conțin gaze;
- b) rezervoarele A și B conțin apă;
- c) rezervorul A conține ulei și rezervorul B conține apă.

Soluție

a) Densitatea gazelor fiind foarte mică în raport cu cea mercurului, greutatea coloanelor de gaz se poate considera neglijabilă,

$$p_A - p_B \approx \rho_{Hg} g h.$$

b) Cele două rezervoare conțin lichide cu aceeași densitate $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{apa}$ și rezultă

$$p_A - p_B = \rho_{apa} g a + (\rho_{Hg} - \rho_{apa}) g h.$$

c) Rezervorul A conține ulei și rezervorul B conține apă,

$$p_A - p_B = \rho_{apă} g (a + b) - \rho_{ulei} g (h + b) + \rho_{Hg} g h.$$

Micromanometrul diferențial cu tub înclinat și rezervor este format dintr-o cuvă metalică prevăzută cu un tub transparent înclinat (fig. 3.8). Lichidul de lucru din aparat este de regulă alcool sau toluen. Racordându-se cuva la presiunea p_1 și capătul liber al tubului la o presiune p_2 , aparatul măsoară diferența de presiune $\Delta p = p_1 - p_2$ (în ipoteza $p_1 > p_2$). În situația în care capătul tubului este deschis, presiunea $p_2 = p_{at}$ și instrumentul măsoară presiunea relativă $\Delta p = p_1 - p_{at}$.

Înainte de punerea în funcțiune a aparatului nivelul de lichid era același în rezervor și tub. După punerea în funcțiune, nivelul în cuvă coboară și în tub se ridică. Pe scara gradată a tubului, se citește o lungime l_C , care este mai mică decât diferența reală l_R , dintre nivelul lichidului din rezervor și cel din tub. Din condiția de conservare a volumului se poate determina legătura dintre aceste lungimi,

$$\frac{\pi D^2}{4}(l_R - l_C)\sin\alpha = \frac{\pi d^2}{4}l_C, \text{ deci } l_R = l_C \left(1 + \frac{d^2}{D^2 \sin\alpha}\right). \quad (3.66)$$

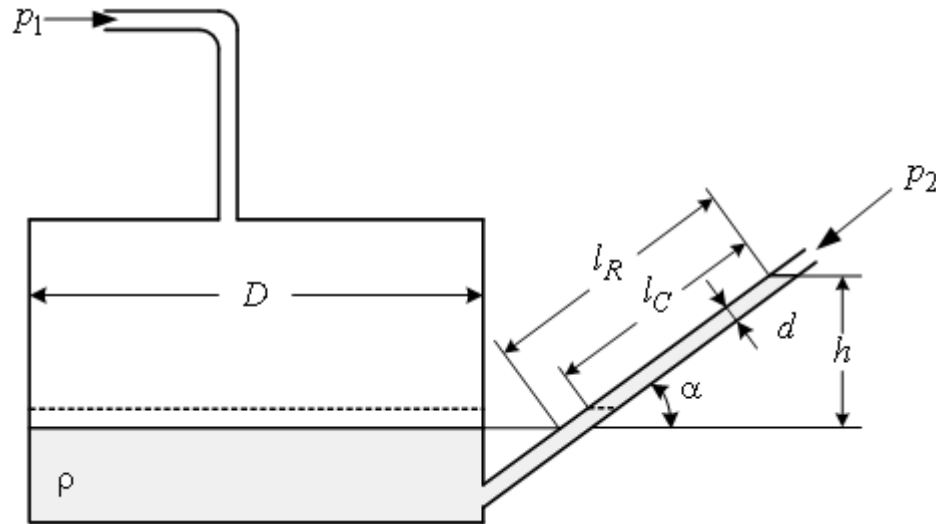


Fig. 3.8. Micromanometrul.

Interesează valoarea diferenței de presiune măsurată în funcție de lungimea citită

$$\Delta p = \rho g h = \rho g l_R \sin\alpha = \rho g l_C \left(\sin\alpha + \frac{d^2}{D^2}\right). \quad (3.67)$$

(cu observația că d^2/D^2 poate fi neglijat față de $\sin\alpha$, pentru $\alpha \geq 10^\circ$).

Acuitatea vizuală a ochiului omenesc fiind scăzută pentru dimensiuni de sub un milimetru, aparatele cu tub vertical pot măsura numai presiuni de minim 10 Pa. Înclinarea tubului permite extinderea domeniului de măsură către presiuni și diferențe de presiune mici, de ordinul 1 Pa, făcând din micromanometru un instrument extrem de util în aerodinamică.

Barometrul cu mercur măsoară presiunea atmosferică absolută. Este format dintr-un tub de sticlă suficient de lung (circa 80 cm), închis la partea superioară și umplut cu mercur, partea inferioară fiind cufundată într-un rezervor cu mercur (fig. 3.9). Mercurul coboară până la o înălțime

h_b , numită *înălțime barometrică*, în partea superioară formându-se vidul barometric. Din condiția $p_{at} = 0 + \rho_{Hg} g h_b = \gamma_{Hg} h_b$ rezultă $h_b = p_{at} / \gamma_{Hg}$.

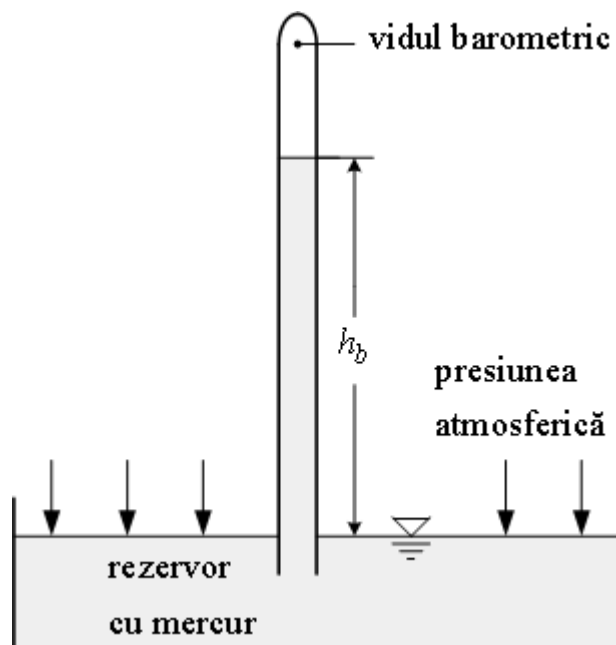


Fig. 3.9. Barometrul cu mercur.

Presiunea atmosferică variază cu altitudinea, temperatura și starea vremii. În tabelul 3.1. se prezintă orientativ variația cu altitudinea a presiunii atmosferice măsurată în mm Hg, în condiții atmosferice normale .

Variația presiunii atmosferice cu altitudinea măsurată în raport cu nivelul mării.

Altitudinea (m)	0	20	1 030	2 180	3 050	5 000	8 000	10 000	20 000
Presiunea atmosferică (mm Hg)	762	760	670	580	520	403	266	198	41

Tabelul 3.1.

Manometrul cu tub Bourdon face parte din categoria manometrelor mecanice. Este utilizat la măsurarea presiunilor mari (0,2 - 10 MPa) și constă dintr-un tub metalic de secțiune lenticulară (tub Bourdon), deschis la capete. La un capăt primește presiunea p , și la celălalt capăt este legat printr-un sistem de pârghii și de roți dințate de un ac indicator.

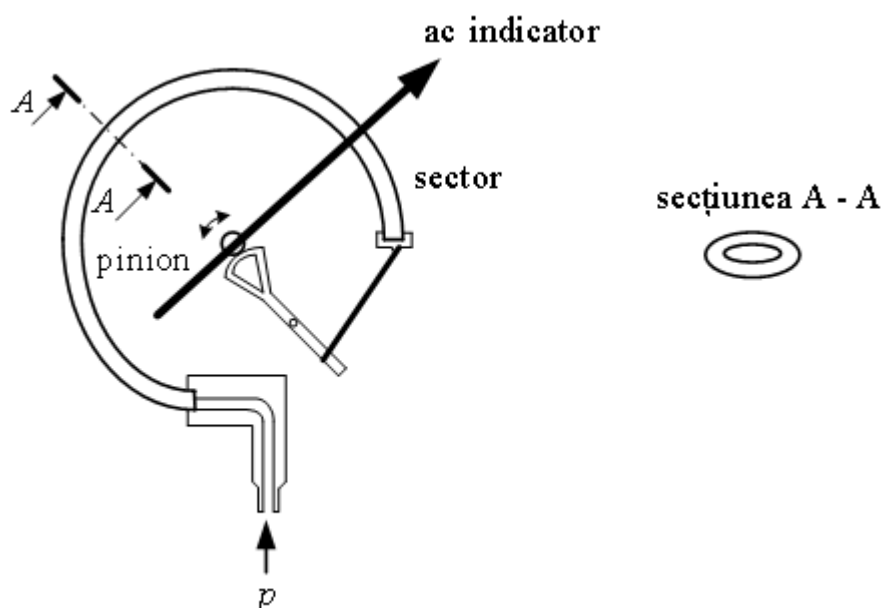


Fig. 3.10. Manometrul cu tub Bourdon.

Principiul de funcționare îl constituie proporționalitatea între solicitarea mecanică produsă de presiune și deformația corespunzătoare a tubului Bourdon, atunci când nu se depășește limita de elasticitate.

3.7. Teorema acțiunii fluidelor în repaus pe pereți solizi

Asupra unui element de suprafață dS al unui perete solid (al unui rezervor sau al unui corp imersat), fluidul exercită o forță elementară de presiune

$$d\vec{F}_p = -p\vec{n}dS, \quad (3.68)$$

unde \vec{n} este versorul normalei exterioare a suprafeței S , iar p reprezintă presiunea în fluid în vecinătatea elementului dS .

În general, efectul forțelor elementare (3.68) asupra întregii suprafețe al unui perete de suprafață S este un torsesor format din forța rezultantă

$$\vec{F}_P = - \iint_S p \vec{n} dS \quad (3.69)$$

și un cuplu rezultat al cărui moment, calculat în raport cu originea O a sistemului de referință este

$$\vec{M}_O = - \iint_S \vec{r} \times p \vec{n} dS . \quad (3.70)$$

Pentru a calcula integralele din ecuațiile (3.69) și (3.70) este necesar ca repartiția presiunii p în fluid să fie cunoscută.

Presiunea p care intervine în relațiile precedente reprezintă presiunea relativă asupra peretelui solid, deci diferența între presiunea fluidului ce acționează asupra peretelui și presiunea exterioară (de regulă cea atmosferică).

3.7.1. Forțe de presiune pe suprafețe plane

Pentru un perete plan, normala corespunzătoare fiecărui element de suprafață \vec{n} este constantă ca mărime și direcție și deci forțele elementare de presiune sunt paralele și de același sens; se obține

$$\vec{F}_P = -\vec{n} \iint_S p dS . \quad (3.71)$$

Rezultanta este o forță normală peretelui plan considerat și este orientată dinspre fluid spre perete.

Momentul rezultat al forțelor elementare în raport cu originea O este

$$\vec{M}_O = \vec{n} \times \iint_S \vec{r} p dS . \quad (3.72)$$

Pentru determinarea punctului de aplicație C_O al forței \vec{F}_P se aplică teorema lui Varignon, sistemul fiind reductibil la o rezultantă unică,

$$\vec{r}_{C_O} \times \vec{F}_P = \vec{M}_O, \text{ deci } \vec{r}_{C_O} \times \left(-\vec{n} \iint_S p \, dS \right) = \vec{n} \times \iint_S \vec{r} p \, dS, \quad (3.73)$$

de unde

$$\vec{r}_{C_O} = \frac{\iint_S \vec{r} p \, dS}{\iint_S p \, dS} + b \vec{n}, \quad \forall b \text{ scalar}, \quad (3.74)$$

\vec{F}_P fiind un vector legat pe direcția normalei. Deoarece interesează punctul în care acest vector atinge planul suprafeței, $b = 0$, vectorul de poziție al centrului de presiune are expresia

$$\vec{r}_C = \frac{\iint_S \vec{r} p \, dS}{\iint_S p \, dS}. \quad (3.75)$$

Punctul de aplicație al rezultantei, notat C , este numit *centru de presiune*.

Acțiunea fluidelor ușoare în repaus pe un perete plan

În cazul fluidelor ușoare în repaus, presiunea este constantă în toată masa fluidului și are aceeași valoare în toate punctele suprafeței peretelui și, prin urmare,

$$\vec{F}_P = -\vec{n} p \iint_S dS = -\vec{n} p S, \quad (3.76)$$

$$\vec{r}_C = \frac{\iint_S \vec{r} \, dS}{\iint_S dS} = \vec{r}_G. \quad (3.77)$$

Acțiunea unui fluid ușor în repaus pe un perete plan este echivalentă cu o forță egală în modul cu produsul dintre presiunea fluidului și aria suprafeței peretelui, direcția normală la suprafață, sensul de la fluid către perete și punctul de aplicație în centrul de greutate al peretelui.

$$\vec{F}_p = -\vec{n} \iint_S p \, dS = -\vec{n} \iint_S \rho g h \, dS = -\vec{n} \iint_S \rho g y \sin \alpha \, dS = -\vec{n} \rho g \sin \alpha \iint_S y \, dS \quad (3.78)$$

Momentul static al suprafeței S în raport cu axa Ox se determină cu relația

$$S_x = \iint_S y \, dS = S y_G \quad (3.79)$$

și rezultă

$$\vec{F}_p = -\vec{n} \rho g y_G \sin \alpha S = -\vec{n} \rho g h_G S \quad . \quad (3.80)$$

Pentru determinarea poziției punctului de aplicație, se utilizează formula (3.75) și de calculează

$$\vec{r}_C = \frac{\iint_S \vec{r} \rho g h \, dS}{\iint_S \rho g h \, dS} = \frac{\rho g \iint_S \vec{r} y \sin \alpha \, dS}{\rho g \iint_S y \sin \alpha \, dS} = \frac{\iint_S \vec{r} y \, dS}{\iint_S y \, dS} = \frac{\iint_S \vec{r} y \, dS}{y_G S} \quad . \quad (3.81)$$

Coordonatele centrului de presiune C , față de sistemul de axe xOy , sunt

$$x_C = \frac{\iint_S x y \, dS}{y_G S} = \frac{I_{xy}}{y_G S}, \quad (3.82)$$

$$y_C = \frac{\iint_S y^2 \, dS}{y_G S} = \frac{I_x}{y_G S}, \quad (3.83)$$

unde I_{xy} este momentul de inerție centrifugal al suprafeței în raport cu sistemul de axe xOy , iar I_x este momentul de inerție în raport cu axa Oy .

În multe aplicații este mai comodă raportarea la un sistem de coordonate cu originea în centrul de greutate G al suprafeței S și axele Gx' , respectiv Gy' , paralele cu Ox , respectiv Oy .

Se utilizează relațiile lui Steiner,

$$I_x = I_{x'} + S y_G^2, \quad I_{xy} = I_{x'y'} + S x_G y_G, \quad (3.84)$$

în care x_G și y_G reprezintă coordonatele centrului de greutate G al suprafeței S , iar $I_{x'y'}$ și $I_{x'}$ sunt aceleași momente de inerție ale suprafeței S , dar calculate în raport cu sistemul de axe $x'Gy'$.

Coordonatele centrului de presiune se pot determina cu relațiile

$$x_C = x_G + \frac{I_{x'y'}}{S y_G} \quad \text{și} \quad y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{S y_G}. \quad (3.85)$$

Observații

1. Dacă suprafața S are o axă de simetrie în lungul liniei de cea mai mare pantă, atunci ea se alege drept axă Oy și în acest caz $I_{xy} = 0$, deci $x_C = 0$.

2. În cazul în care pe suprafața liberă a lichidului se exercită o presiune relativă pozitivă p_1 , atunci formulele pot fi aplicate numai dacă se consideră sistemul xOy cu axa Ox la nivelul planului izobar de presiune egală cu presiunea atmosferică (planul manometric), situat la înălțimea $h_1 = p_1 / \gamma$ deasupra suprafeței libere.

Aplicația 3.4.

Orificiul dreptunghiular al bazinului umplut cu apă este închis cu o stavilă plană cu înălțimea $a = 1\text{ m}$, lățimea $b = 1,5\text{ m}$ și greutatea $F_G = 8\text{ kN}$. Stavila este montată cu unghiul de înclinare $\alpha = 60^\circ$ și se poate roti în jurul axului A . Să se determine care este nivelul minim h la care stavila se deschide, considerând frecările neglijabile.

Soluție

Adâncimea centrului de greutate al stavilei este

$$h_G = h - \frac{a}{2} \sin \alpha$$

și poziția sa în raport cu planul suprafeței libere rezultă

$$y_G = \frac{h_G}{\sin \alpha}.$$

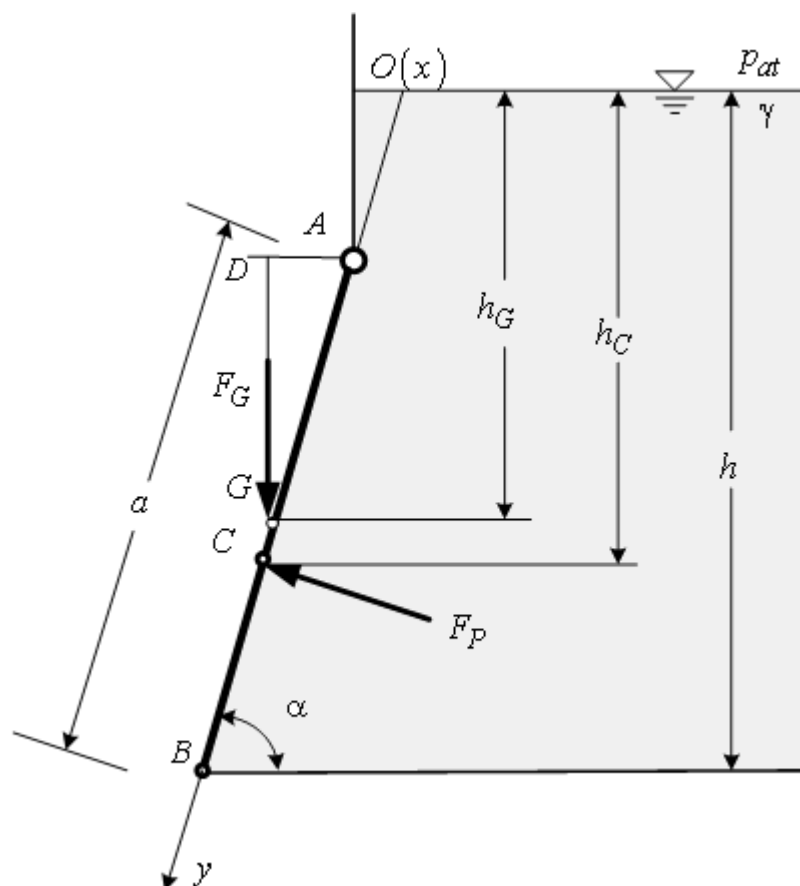


Fig. 3.12. Stavilă plană imersată.

Poziția centrului de presiune al stavilei și adâncimea la care se situează se determină cu formulele

$$y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{S y_G} = \frac{h_G}{\sin \alpha} + \frac{\frac{a^3 b}{12}}{ab \frac{h_G}{\sin \alpha}} = \frac{h_G}{\sin \alpha} + \frac{a^2 \sin \alpha}{12 h_G},$$

$$h_C = y_C \sin \alpha = h_G + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{12 h_G}.$$

În momentul deschiderii stavilei, reacțiunea de contact în punctul B devine nulă, iar momentul resultant al forțelor de presiune și de greutate relativ la centrul de rotație A este nul,

$$F_G \cdot \overline{AD} = F_P \cdot \overline{AC},$$

unde

$$\overline{AD} = \frac{a}{2} \cos \alpha,$$

$$F_P = \gamma h_G S = \gamma h_G a b,$$

$$\overline{AC} = \frac{a}{2} + \overline{CG} = \frac{a}{2} + y_C - y_G = \frac{a}{2} + \frac{1}{\sin \alpha} (h_C - h_G) = \frac{a}{2} + \frac{a^2 \sin \alpha}{12 h_G},$$

deci

$$F_G \frac{a}{2} \cos \alpha = \gamma h_G a b \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2 \sin \alpha}{12 h_G} \right).$$

Rezultă adâncimea centrului de greutate a stavilei

$$h_G = \frac{F_G \cos \alpha}{\gamma a b} - \frac{a}{6} \sin \alpha,$$

Se calculează nivelul h al apei din bazin, la care se produce deschiderea orificiului

$$h = h_G + \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{F_G \cos \alpha}{\gamma a b} + \frac{a}{3} \sin \alpha = \frac{8000 \cdot 0,5}{9810 \cdot 1 \cdot 1,5} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,56 \text{ m.}$$

Aplicația 3.5

Să se determine punctul de aplicație și forța care se exercită asupra capacului dreptunghiular din figura 3.13 de dimensiuni $a = 0,5 \text{ m}$ și $b = 1,5 \text{ m}$, având cota inferioară la $h_2 = 2 \text{ m}$ față de fundul rezervorului.

Rezervorul conține apă cu greutatea specifică $\gamma = 9\,810\text{ N/m}^3$ și este închis. Pe fundul rezervorului se înregistrează o presiune manometrică $p_M = 88\text{ kN/m}^2$, iar înclinarea peretelui este $\alpha = 60^\circ$.

Soluție

Adâncimea echivalentă a apei este

$$h = \frac{p_M}{\gamma} = \frac{88\,000}{9\,810} = 8,97\text{ m}.$$

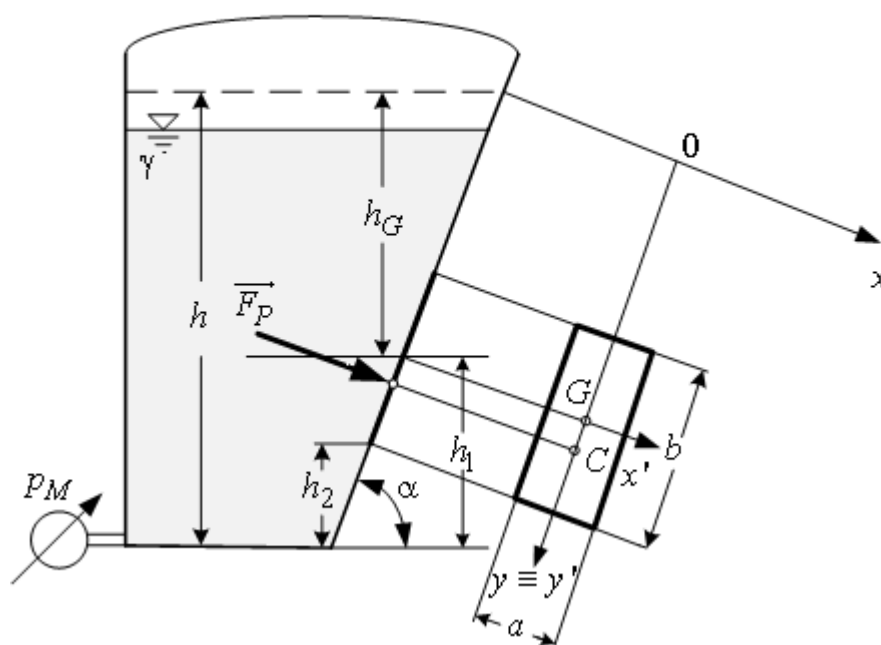


Fig. 3.13. Acțiunea unui lichid dintr-un rezervor închis asupra unui capac dreptunghiular.

Planul presiunii atmosferice se află la 8,97 m deasupra fundului rezervorului. Distanța de la centrul de greutate a capacului la fundul rezervorului este

$$h_1 = h_2 + \frac{b \sin \alpha}{2} = 2 + \frac{1,5 \sin 60^\circ}{2} = 2,65\text{ m}.$$

Adâncimea echivalentă a centrului de greutate al capacului este

$$h_G = h - h_1 = 8,97 - 2,65 = 6,32 \text{ m}.$$

Forța hidrostatică pe capac are mărimea

$$F_P = \gamma h_G S = 9\,810 \cdot 6,32 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 46\,499 \text{ N},$$

iar punctele de aplicație sunt

$$x_C = x_G = 0;$$

$$y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{S y_G} = \frac{h_G}{\sin \alpha} + \frac{\frac{b^3 a}{12} \sin \alpha}{b a h_G} = \frac{h_G}{\sin \alpha} + \frac{b^2 \sin \alpha}{h_G} = 7,606 \text{ m}.$$

Cazuri particulare

1. Suprafețe plane verticale

În cazul suprafețelor plane verticale $\alpha = 90^0$ și prin urmare $y_C = h_C$ și $y_G = h_G$.

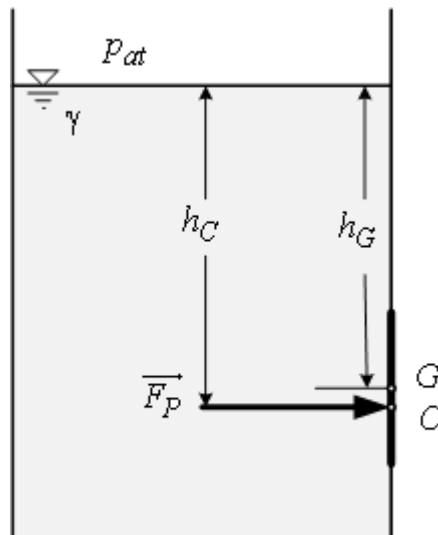


Fig. 3.14. Acțiunea unui lichid în repaus pe un perete vertical.

Se consideră cazul rezervorului deschis, $p_0 = p_{at}$. Mărimea forței de presiune și coordonatele punctului de aplicație al acesteia C se obțin prin particularizarea relațiilor precedente. Astfel, forța de presiune este

$$\vec{F}_P = -\vec{n} \gamma h_G S. \quad (3.86)$$

Punctul de aplicație al centrului de presiune are coordonatele

$$x_C = \frac{I_{xy}}{h_G S} \quad \text{și} \quad y_C = \frac{I_x}{h_G S}. \quad (3.87)$$

2. Suprafețe plane orizontale

Forța de presiune pe o suprafață plană orizontală S , situată la adâncimea h , are expresia

$$\vec{F}_P = -\vec{n} \gamma h_G S = -\vec{n} \gamma V. \quad (3.88)$$

în care V este volumul cilindrului având drept bază suprafața S și înălțimea h . În această situație, centrul de presiune C se confundă cu centrul de greutate G al suprafeței.

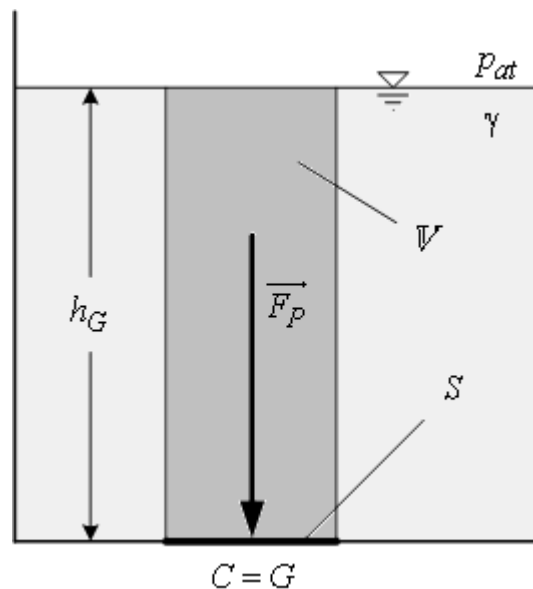


Fig. 3.15. Acțiunea unui lichid în repaus pe un perete orizontal.

Paradoxul hidrostatic

Forța de presiune este aceeași pe fundul unor vase de formă oarecare, având aceeași suprafață a fundului, dacă înălțimea lichidului în vas este aceeași (fig. 3.16), cu toate că greutatea lichidului din diferite vase este diferită.

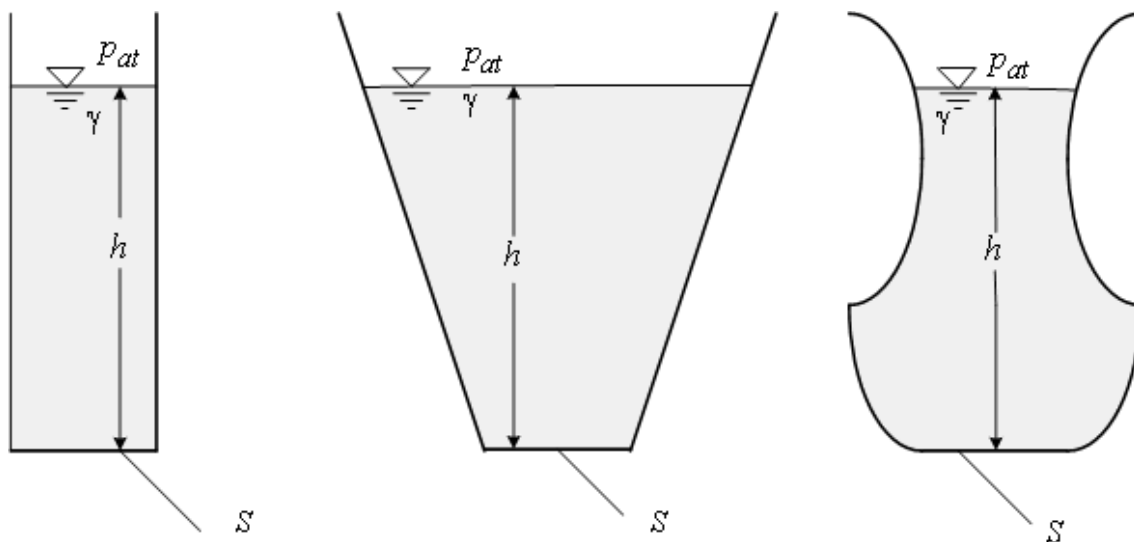


Fig. 3.16. Paradoxul hidrostatic.

Aplicația 3.6.

Să se determine forța hidrostatică pe capacul circular de diametru $d = 2$ m al rezervorului de apă din figura 3.17. Se consideră că muchia superioară a capacului se află la o adâncime de $a = 5$ m .

Soluție

Adâncimea la care se află centrul de greutate al capacului

$$h_G = a + d/2 = 5 + 1 = 6 \text{ m} .$$

Mărimea forței hidrostatice este

$$F_P = \gamma h_G S = 9\,810 \cdot 6 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 184\,820 \text{ N} .$$

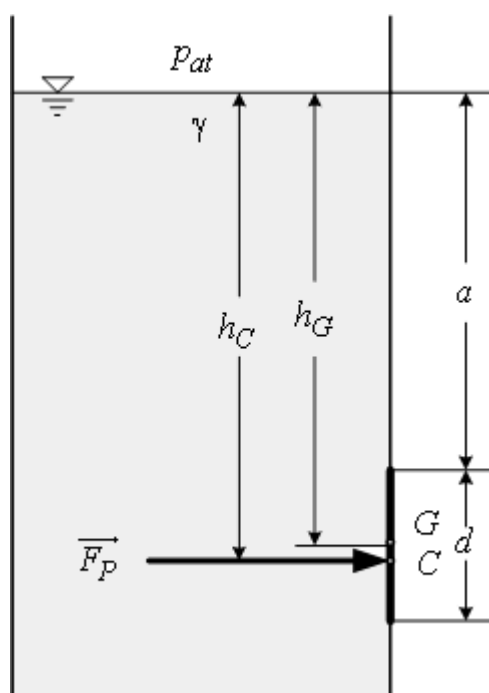


Fig. 3.17. Capac imersat.

Punctul de aplicație al forței hidrostactice se află la adâncimea

$$h_C = h_G + \frac{I_{x'}}{h_G \cdot S} = 6 + \frac{\frac{\pi \cdot 2^4}{64}}{6 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4}} = 6,0416 \text{ m}.$$

3.7.2. Determinarea forței de presiune și a centrului de presiune cu ajutorul epurei de presiune

Metoda se aplică numai în cazul suprafețelor de formă dreptunghiulară și se bazează pe folosirea diagramei de variație a presiunii statice.

Se consideră o suprafață dreptunghiulară S , înclinată cu unghiul α față de orizontală, asupra căreia se exercită acțiunea unui lichid de greutate specifică γ . Cota superioară a suprafeței dreptunghiulare de înălțime a și lățime b , se află la adâncimea h_1 , iar cea inferioară la adâncimea h_2 . Se construiește epura de presiune (diagrama presiunilor) pe această suprafață, de forma unui trapez $ABED$ (fig. 3.18).

Pe suprafața dreptunghiulară se ia un element dS de lățime b și înălțime dy având aria $dS = b dy$ situat la adâncimea h , unde acționează presiunea $p = \gamma h$. Forța elementară corespunzătoare elementului de arie dS are mărimea

$$dF_p = p(b dy) = b(p dy) = b d\sigma, \quad (3.89)$$

în care $d\sigma = p dy = \gamma h dy$ este elementul de arie al diagramei trapezoidale a presiunilor. Forța de presiune pe suprafața dreptunghiulară este

$$F_p = \iint_{\sigma} b d\sigma = b\sigma, \quad (3.90)$$

unde $\sigma = \frac{1}{2}(\gamma h_1 + \gamma h_2)a$ este aria epurei de presiune $ABED$ (exprimată în N/m).

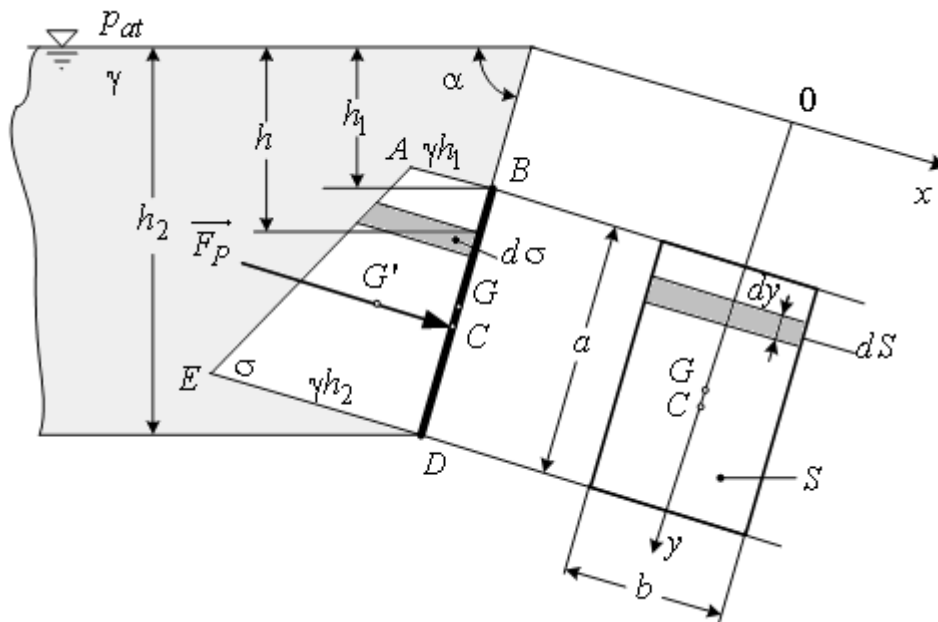


Fig. 3.18. Epura de presiune în cazul unei suprafețe dreptunghiulare.

Se deduce că mărimea forței de presiune care se exercită pe un perete plan dreptunghiular este egală cu produsul dintre aria epurei de presiuni și lățimea peretelui (volumul epurei de presiune).

Punctul de aplicație al forței de presiune $\overrightarrow{F_P}$ este determinat de centrul de greutate G' al diagramei presiunilor, prin care se duce o direcție normală suprafeței S . Centrul de presiune căutat C , se află axa de simetrie Oy a suprafeței S , în punctul în care normala întâlnește această suprafață.

Pentru a obține poziția centrului de greutate G' al diagramei trapezoidale se procedează astfel: se prelungește baza mică de exemplu spre dreapta, cu un segment $BB' = ED$; se prelungește baza mare spre stânga cu un segment $EE' = BA$; punctul G' se găsește la intersecția segmentului $B'E'$ cu linia mediană MN (fig. 3.19).

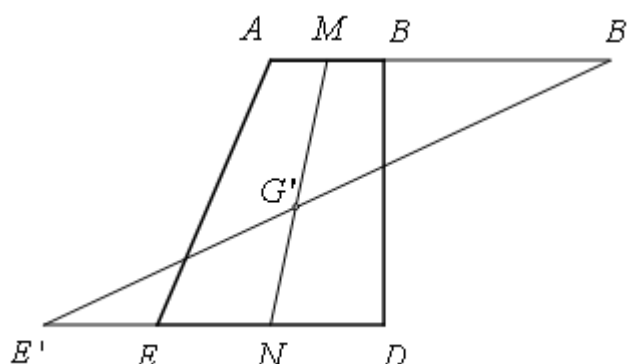


Fig. 3.19. Determinarea poziției centrului de greutate al epurei presiunilor.

Epurele de presiuni pot fi triunghiuri și trapeze în cazul lichidelor sau dreptunghiuri în cazul gazelor sub presiune, precum și combinații ale acestor forme geometrice, în funcție de problema completă studiată.

Aplicația 3.7.

Un perete plan vertical dreptunghiular cu o lățime de $b = 5$ m este ud de apă, $\gamma = 9\,810$ N/m³, până la o înălțime $h = 4$ m. Să se traseze epura de presiuni și să se determine forța de presiune care acționează asupra peretelui.

Soluție

Mărimea forței de presiune pe perete este egală cu volumul epurei de presiune

$$F_P = \sigma b = \frac{1}{2} \gamma h^2 b = \frac{1}{2} \cdot 9\,810 \cdot 4^2 \cdot 5 = 392,4 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

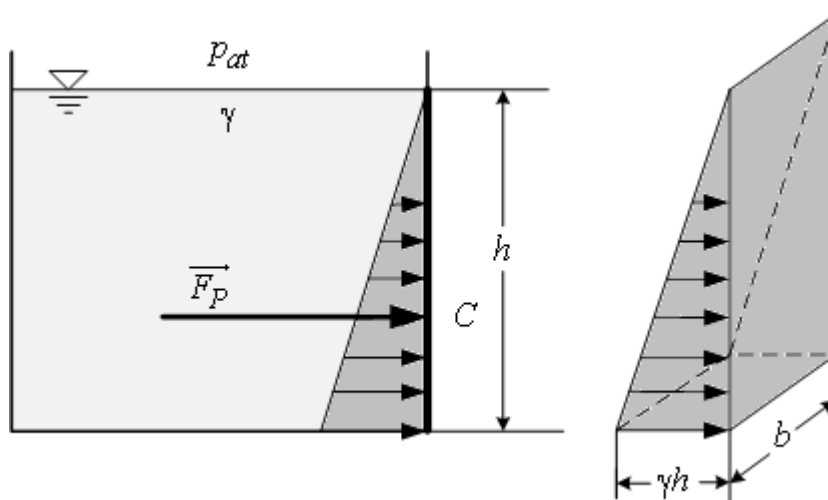


Fig. 3.20. Epura de presiune pentru o stavilă plană verticală.

Direcția de acțiune a forței (suportul forței) trece prin centrul de greutate al epurei de presiuni (fig. 3.20); așadar centrul de presiune C se află pe axa verticală de simetrie a peretelui dreptunghiular vertical la adâncimea

$$h_C = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2,66 \text{ m}.$$

3.7.3. Forțe de presiune pe suprafețe curbe deschise

Se consideră un rezervor care conține un lichid cu presiunea pe suprafața liberă egală cu cea atmosferică. Se adoptă un sistem de axe cu planul xOy în planul suprafeței libere și cu axa verticală Oz orientată în jos (fig. 3.21). Fie o suprafață oarecare S , udată de lichid numai pe o față, cealaltă fiind în contact cu presiunea atmosferică (S constituie o porțiune din peretele rezervorului).

Dacă se consideră un punct oarecare al suprafeței S , în care presiunea fluidului este p , atunci forța elementară de presiune corespunzătoare unui element de suprafață dS în jurul punctului este

$$d\vec{F}_P = -p\vec{n} dS. \quad (3.91)$$

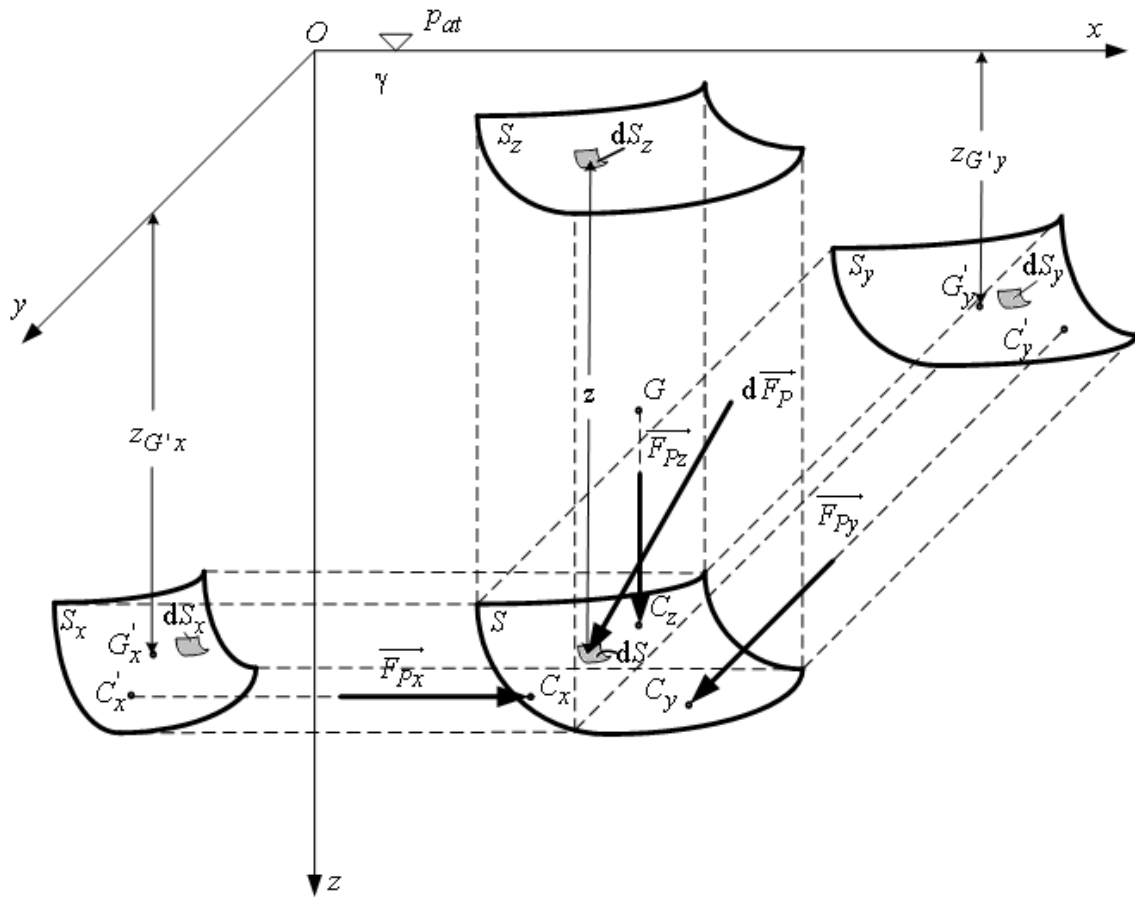


Fig. 3.21. Acțiunea unui fluid în repaus pe o suprafață curbă deschisă.

Pentru un perete curb sistemul de forțe elementare $d\vec{F}_P$ se reduce în orice punct la un torsesor format din rezultanta $\vec{F}_P = - \iint_S p \vec{n} dS$ și un cuplu al cărui moment este funcție de punctul de reducere (de obicei originea sistemului de axe, deci $\vec{M}_O = - \iint_S \vec{r} \times p \vec{n} dS$). În Mecanica fluidelor se procedează astfel: se înlocuiește torsesorul (\vec{F}_P, \vec{M}_O) al forțelor elementare de presiune cu un sistem de forțe, $\vec{F}_{Px}, \vec{F}_{Py}, \vec{F}_{Pz}$, paralele cu axele de coordonate; aceste forțe sunt în general neconcurente. Se proiectează fiecare forță elementară pe axele sistemului de coordonate considerat și rezultă

$$d\vec{F}_P = dF_{Px} \vec{i} + dF_{Py} \vec{j} + dF_{Pz} \vec{k}, \quad (3.92)$$

unde

$$\begin{aligned} dF_{Px} &= d\vec{F}_P \vec{i} = -p(\vec{n} \vec{i}) dS = p dS_x, \\ dF_{Py} &= d\vec{F}_P \vec{j} = -p(\vec{n} \vec{j}) dS = p dS_y, \\ dF_{Pz} &= d\vec{F}_P \vec{k} = -p(\vec{n} \vec{k}) dS = p dS_z. \end{aligned}$$

Aici, dS_x , dS_y și dS_z sunt ariile proiecțiilor algebrice ale elementului de suprafață dS al peretelui pe planele yOz , xOz și xOy și reprezintă elementele de arie ale proiecțiilor S_x , S_y și S_z ale suprafeței S pe planele sistemului de coordonate.

Rezultanta \vec{F}_{Px} a forțelor elementare paralele cu axa Ox are mărimea

$$F_{Px} = \iint_{S_x} p dS_x \quad (3.93)$$

și trece prin punctul C_x al suprafeței S , suportul său trecând prin centrul de presiune C'_x al ariei S_x , de vector de poziție

$$\vec{r}_{C'_x} = \frac{\iint_{S_x} \vec{r} p dS_x}{\iint_{S_x} p dS_x}. \quad (3.94)$$

Analog

$$F_{Py} = \iint_{S_y} p dS_y, \quad \vec{r}_{C'_y} = \frac{\iint_{S_y} \vec{r} p dS_y}{\iint_{S_y} p dS_y} \quad (3.95)$$

și

$$F_{Pz} = \iint_{S_z} p \, dS_z, \quad \overrightarrow{r_{C'_z}} = \frac{\iint_{S_z} \vec{r} p \, dS_z}{\iint_{S_z} p \, dS_z}. \quad (3.96)$$

Acțiunea fluidelor ușoare în repaus pe un perete curb

În acest caz presiunea poate fi considerată constantă și prin urmare

$$F_{Px} = p S_x, \quad \overrightarrow{r_{C'_x}} = \overrightarrow{r_{G'_x}}; \quad (3.97)$$

$$F_{Py} = p S_y, \quad \overrightarrow{r_{C'_y}} = \overrightarrow{r_{G'_y}}; \quad (3.98)$$

$$F_{Pz} = p S_z, \quad \overrightarrow{r_{C'_z}} = \overrightarrow{r_{G'_z}}. \quad (3.99)$$

Forțele echivalente sunt paralele cu axele de coordonate și trec prin centrele de greutate ale proiecțiilor algebrice ale suprafeței S a peretelui pe planele de coordonate.

Acțiunea fluidelor grele în repaus pe un perete curb

În cazul fluidelor grele, presiunea în punctul curent al peretelui, situat la adâncimea z , este $p = \gamma z$ și rezultă

$$F_{Px} = \iint_{S_x} p \, dS_x = \iint_{S_x} \gamma z \, dS_x = \gamma z_{G'_x} S_x, \quad \overrightarrow{r_{C'_x}} = \frac{\iint_{S_x} \vec{r} z \, dS_x}{z_{G'_x} S_x}; \quad (3.100)$$

$$F_{Py} = \iint_{S_y} p \, dS_y = \iint_{S_y} \gamma z \, dS_y = \gamma z_{G'_y} S_y; \quad \overrightarrow{r_{C'_y}} = \frac{\iint_{S_y} \vec{r} z \, dS_y}{z_{G'_y} S_y}; \quad (3.101)$$

$$F_{Pz} = \iint_{S_z} p \, dS_z = \iint_{S_z} \gamma z \, dS_z = \gamma V; \quad \overrightarrow{r_{F_{pz}}} = \frac{\iint_{S_z} \vec{r} z \, dS_z}{V} = \overrightarrow{r_G(V)}. \quad (3.102)$$

Forța $\overrightarrow{F_{Pz}}$ trece prin centrul de greutate G al volumului corpului de presiune V , cuprins între suprafața curbă deschisă S din spațiu și proiecția ei S_z pe planul presiunii atmosferice.

Concluzii

1. Forțele orizontale se determină analog cu forța exercitată de un lichid pe o suprafață plană, în care rolul suprafeței îl joacă proiecțiile algebrice al suprafeței curbe pe planurile yOz și xOz . Dacă o proiecție algebrică este nulă, atunci forța corespunzătoare este nulă.

2. Forța verticală este egală cu greutatea lichidului cuprins între peretele curb și proiecția sa pe planul xOy , direcția ei trece prin centrul de greutate G al acestui volum.

Aplicația 3.8.

Să se determine forța de presiune cu care apa, de greutate specifică γ , acționează asupra stăvilărilor cilindric de diametru D și lungime L (fig. 3.22).

Soluție

Suprafața udată este o jumătate de cilindru. Sistemul de axe se alege astfel încât planul xOy să fie planul suprafeței libere, iar axa Oz cu sensul pozitiv în jos, trece prin centrul de greutate al cilindrului. În acest caz componentele forței de presiune sunt:

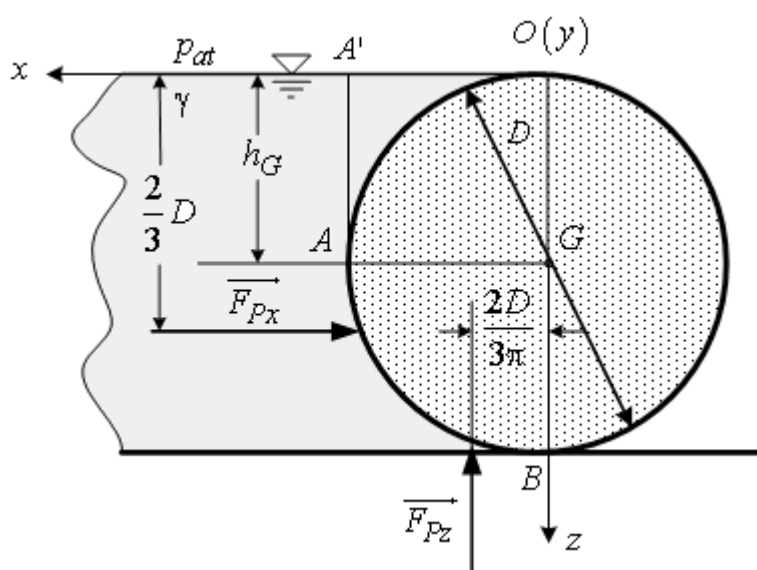


Fig. 3.22. Stăvilă cilindrică.

$$F_{Px} = \gamma h_G S = \gamma \frac{D}{2} L D = \frac{1}{2} \gamma L D^2,$$

$F_{Py} = 0$ (deoarece proiecția suprafeței udate pe planul xOz este nulă),

$$\begin{aligned} F_{Pz} &= F_{PzOA} - F_{PzAB} = \gamma V_{OAA'} - \gamma V_{ABOA'} = -\gamma (V_{ABOA'} - V_{OAA'}) = \\ &= -\gamma V_{OAB} = -\gamma \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L = -\frac{\gamma}{8} \pi D^2 L. \end{aligned}$$

Semnul minus arată că forța $\overrightarrow{F_{Pz}}$ este orientată în sus.

Ațiunea apei asupra stăvilărilor se reduce la două forțe, $\overrightarrow{F_{Px}}$ și $\overrightarrow{F_{Pz}}$, situate în planul vertical xOz , cu suporturile trecând respectiv prin punctele de coordonate $\left(0, \frac{2D}{3}\right)$ și $\left(\frac{2D}{3\pi}, \frac{D}{2}\right)$. Rezultanta acestor forțe, $\overrightarrow{F_P}$ acționează în planul $y = 0$, are modulul

$$F_P = \sqrt{F_{Px}^2 + F_{Pz}^2} = \frac{\gamma D^2 L}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} \right) = 0,635 \gamma D^2 L$$

și direcția dată de $\alpha = \arctg(F_{Pz}/F_{Px}) = \arctg(\pi/4)$, față de orizontală.

Aplicația 3.9.

Fie o stavilă segment de rază r și lungime l , care permite realizarea unei acumulări de apă de adâncime h (cu greutatea specifică γ). Să se determine componentele forței de presiune care acționează pe stavilă (fig. 3.23).

Soluție

Deoarece fiecare forță elementară $d\overrightarrow{F_P}$ trece prin Q , sistemul forțelor $d\overrightarrow{F_P}$ se reduce la o rezultantă unică al cărei suport trece prin Q .

Modulul forței orizontale $\overrightarrow{F_{Px}}$ care acționează pe stavilă este

$$F_{Px} = \gamma h_G S_x = \gamma \left(h - \frac{r}{2} \right) r l.$$

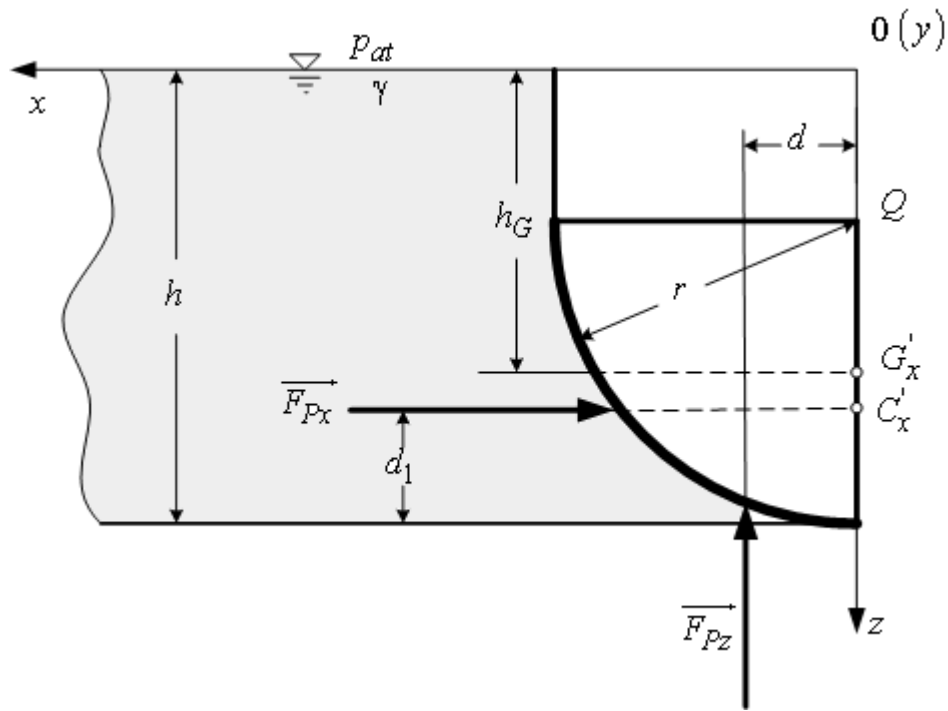


Fig. 3.23. Stăvilă segment.

Suportul forței $\overrightarrow{F_{Px}}$ se află la distanța d_1 față de fundul rezervorului, deci

$$h - d_1 = h_G + \frac{I_{x'}}{h_G S} = h - \frac{r}{2} + \frac{l \frac{r^3}{12}}{\left(h - \frac{r}{2}\right) r l},$$

rezultă

$$d_1 = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{6(2h - r)}.$$

Forța $\overrightarrow{F_{Py}}$ este nulă, proiecția suprafeței stăvilei pe planul xOz fiind o curbă.

Modulul forței verticale $\overrightarrow{F_{Pz}}$ este

$$F_{Pz} = \gamma V = \gamma \left[\frac{\pi r^2}{4} + r(h-r) \right] l$$

și este orientată în sus. Suportul forței verticale de presiune trece prin centrul de greutate al volumului corpului de presiune. El se află la distanța d de articulația Q . Aplicând teorema lui Varignon în raport cu punctul Q și ținând seama că momentul resultant este nul, se obține $F_{Px}(r-d_1) - F_{Pz}d = 0$ de unde rezultă $d = (F_{Px}/F_{Pz})(r-d_1)$.

3.7.4. Principiul lui Arhiede

Se consideră un corp de volum V limitat de o suprafață închisă S , scufundat într-un lichid. Se alege un sistem de axe $Oxyz$ în care xOy este în planul suprafeței libere a lichidului, iar axa Oz este verticală, cu sensul pozitiv în jos.

Rezultanta forțelor de presiune pe frontiera S a corpului este $\vec{F}_P = - \iint_S p \vec{n} dS$. Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski se transformă integrala de suprafață într-o integrală de volum și se obține

$$\vec{F}_P = - \iint_S p \vec{n} dS = - \iiint_V \text{grad } p dV \quad (3.103)$$

Din ecuația lui Euler pentru statica fluidelor, $\vec{F}_m = (\text{grad } p)/\rho$ (3.3), cu forța masică pe unitatea de masă, $\vec{F}_m = g \vec{k}$, rezultă, $\text{grad } p = \rho g \vec{k}$. Așadar, fluidul exercită asupra corpului forța

$$\vec{F}_P = - \iiint_V \rho g \vec{k} dV = -\rho g V \vec{k}. \quad (3.104)$$

Momentul resultant al forțelor elementare de presiune în raport cu originea sistemului de axe este

$$\vec{M} = - \iint_S (\vec{r} \times \vec{n} p) dS = \iint_S (\vec{n} \times p \vec{r}) dS. \quad (3.105)$$

Se transformă integrala de suprafață într-o integrală de volum și rezultă

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \iint_S (\vec{n} \times p \vec{r}) dS = \iiint_V \text{rot}(p \vec{r}) dV = \iiint_V (\text{grad } p \times \vec{r} + p \text{rot } \vec{r}) dV = \\
&= \iiint_V (\text{grad } p \times \vec{r}) dV = \rho g \vec{k} \times \iiint_V \vec{r} dV .
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Considerând \vec{r}_G , centrul de greutate al volumului dezlucuit de corp, expresia momentului devine

$$\vec{M} = \rho g \vec{k} \times \vec{r}_G \cdot V = \vec{r}_G \times (-\rho g V \vec{k}) = \vec{r}_G \times \vec{F}_P . \tag{3.107}$$

Însă, momentul forței rezultante în raport cu originea este $\vec{M}' = \vec{r}_C \times \vec{F}_P$ și în concluzie, ținând seama de teorema lui Varignon, $\vec{M}' = \vec{M}$ sau $\vec{r}_C = \vec{r}_G$ sau $C \equiv G$.

Forța portantă ce acționează asupra unui corp cufundat într-un lichid se numește *forța arhimedrică*, $\vec{F}_A = \vec{F}_P = -\rho g V \vec{k}$. Suportul acestei forțe trece prin centrul de greutate C denumit *centru de carenă*, al volumului V de lichid dezlucuit (denumit *volum de carenă*).

Principiul lui Arhimede: *un corp cufundat într-un lichid este supus din partea acestuia acțiunii unei forțe verticale portante egală în modul cu greutatea volumului de lichid dezlucuit de corp. Suportul forței portante trece prin centrul de greutate al volumului de lichid dezlucuit de corp.*

3.7.5. Plutirea corpurilor

Asupra unui corp de volum V , complet imersat într-un lichid, aflat în stare de repaus acționează două forțe: forța de greutate $\vec{F}_G = \rho_m g V \vec{k}$, unde ρ_m este densitatea medie a corpului, aplicată în centrul de greutate al corpului și forța arhimedrică $\vec{F}_A = -\rho g V_C \vec{k}$, al cărui suport trece prin centrul de carenă. Volumul de carenă V_C este egal cu volumul V al corpului, pentru un corp complet imersat.

Lăsând corpul liber pot apare trei cazuri.

1. Modulul forței de greutate $F_G = \rho_m g V$ este mai mare decât modulul forței arhimedrice $F_A = \rho g V_C = \rho g V$, corpul coboară vertical până atinge fundul rezervorului.

2. Modulul forței de greutate este egal cu modulul forței arhimedrice $F_G = F_A$, corpul rămâne în repaus în poziția în care se află. Situația corespunde plutirii în imersie, pentru care $V_C = V$.

3. Modulul forței de greutate este mai mic decât modulul forței arhimedrice $\rho_m g V < \rho g V$, corpul se ridică la suprafața liberă a lichidului și iese parțial din lichid. Prin ridicarea deasupra suprafeței libere, volumul de carenă se micșorează și mărimea forței arhimedrice scade până când ajunge să fie egală cu modulul forței de greutate $\rho_m g V = \rho g V_C$, corpul plutind la suprafața lichidului.

Se numește *plutirea* unui corp, proprietate acestuia de a rămâne în stare de repaus, atunci când este lăsat liber într-un lichid. Condiția de plutire este: modulul forței de greutate a corpului $F_G = \rho_m g V$ este egal cu modulul forței arhimedrice $F_A = \rho g V_C$.

Capitolul 4

CINEMATICA FLUIDELOR

Cinematica fluidelor studiază mișcarea fluidelor fără a ține seama de forțele care determină mișcarea și de transformările energetice produse. Rezultatele obținute de cinematică sunt valabile indiferent dacă fluidul este vâscos sau nevâscos.

4.1. Noțiuni de cinematica fluidelor

Cinematica fluidelor definește unele noțiuni fundamentale care descriu curgerea fluidelor.

Definiții

- *Curentul de fluid* reprezintă un mediu fluid în mișcare.
- *Linia de curent* reprezintă înfășurătoarea la un moment dat t a vectorilor viteză corespunzători particulelor fluide situate pe ea. Linia de curent este o curbă tangentă în fiecare din punctele sale vectorului viteză al particulei fluide care trece la momentul t prin acel punct (fig. 4.1). Liniile de curent sunt, prin urmare, liniile de forță ale câmpului vectorului viteză la momentul t .

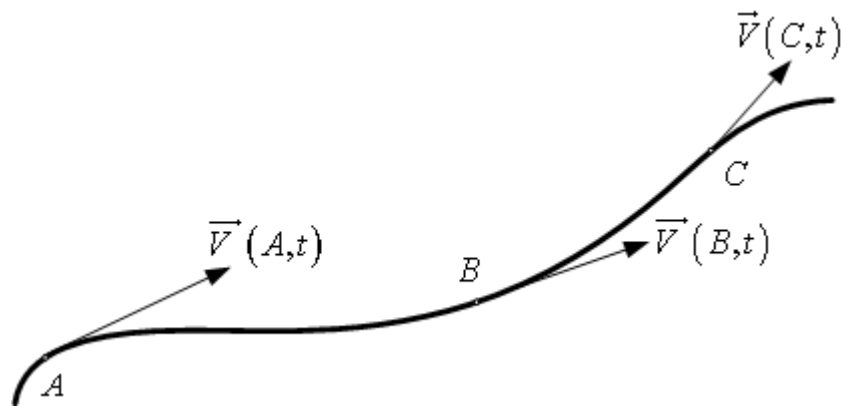


Fig. 4.1. Linia de curent.

O metodă pentru a vizualiza liniile de curent este de a introduce o serie de particule solide în suspensie într-un fluid în mișcare. Dacă se realizează o fotografie cu un timp de expunere foarte mic Δt , corespunzător fiecărei particule se vizualizează o serie de benzi relativ scurte. Linia mediană a acestor benzi indică direcția vitezei particulei corespunzătoare, lungimea ei fiind proporțională cu această viteză. Observând totalitatea vitezelor particulelor se obține câmpul de viteze la un moment dat t . Câmpul este cu atât mai exact cu cât particula este mai mică și timpul de expunere mai mic.

În cazul mișcărilor permanente liniile de curent sunt aceleași în orice moment (fig. 4.2), în timp ce în cazul mișcărilor nepermanente, liniile de curent se modifică în timp (fig. 4.3).

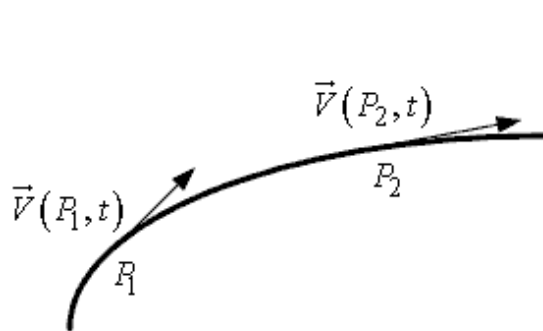


Fig. 4.2. Linia de curent pentru mișcări permanente.

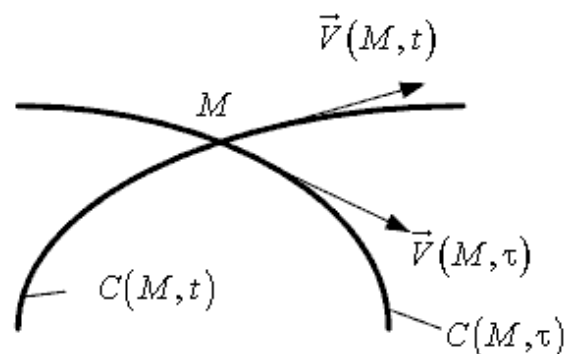
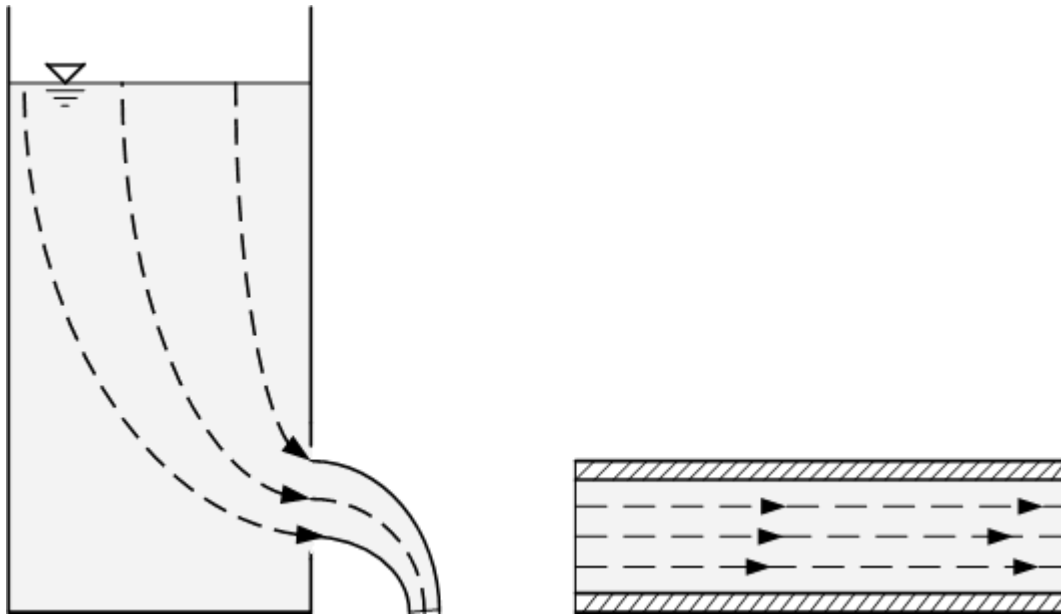


Fig. 4.3. Linii de curent pentru mișcări nepermanente.

Se utilizează notațiile: P_1, P_2 particule fluide, M punct fix, $C(M, t)$ linia de curent la momentul t trecând prin punctul M ; $C(M, \tau)$ linia de curent care trece prin același punct M , dar la un alt timp $\tau > t$. În figura 4.4. se prezintă două exemple de linii de curent.



a) Curgerea printr-un orificiu

b) Curgerea între două plăci plane paralele

Fig. 4.4. Exemple de linii de curent.

Ecuatiile diferențiale ale liniilor de curent la momentul t se scriu sub formă vectorială $\vec{V} \times d\vec{r} = 0$ sau sub forma unui sistem de ecuații diferențiale,

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}, \quad (4.1)$$

unde timpul t este considerat ca fiind parametru.

Liniile de curent au următoarele proprietăți:

1) liniile de curent umplu în întregime spațiul ocupat de fluid (ipoteza mediului continuu);

2) în general liniile instantanee de curent nu se intersectează (excepție fac punctele critice în care viteza este nulă sau infinită).

• *Traectoria* unei particule se definește ca drumul parcurs de această particulă în mișcarea sa. Traectoriile pot fi vizualizate urmărind drumul parcurs de particule solide în suspensie într-un fluid. Dacă se utilizează pentru vizualizare fotografierea, atunci timpii de expunere trebuie să fie cât mai lungi și numărul de particule redus.

Ecuatiile vectoriale ale traectoriilor sub formă vectorială sunt

$$d\vec{r} = \vec{V}(\vec{r}, t) dt, \quad (4.2)$$

sau sub forma unui sistem de ecuații diferențiale,

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt. \quad (4.3)$$

Se obțin trei ecuații diferențiale în care timpul t este o variabilă independentă. Se observă că vectorii tangenți la o traectorie sunt vectorii viteză a aceleiași particule fluide P , dar la momente diferite t_1, t_2, t_3 (fig.4.5).

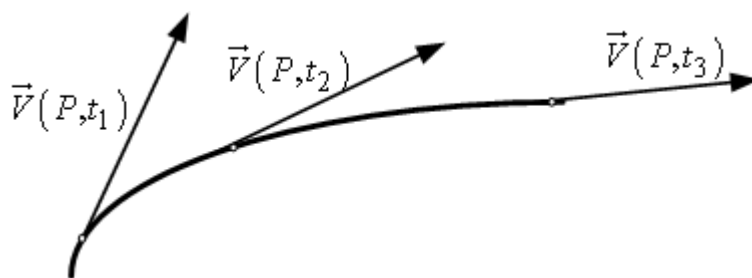


Fig. 4.5. Traectoria unei particule de fluid.

În general, pentru mișcări nepermanente, traectoria este diferită de linia de curent. În cazul mișcărilor permanente, caracterizate prin mărimi fizice independente de timpul t , liniile de curent se confundă cu traectoriile.

• *Suprafața de curent* este suprafața formată de liniile de curent care se sprijină pe o curbă oarecare, numită curbă generatoare.

• *Tubul de curent* este suprafața de curent generată de o curbă închisă, simplă (notată C) care nu este o linie de curent (fig. 4.6).

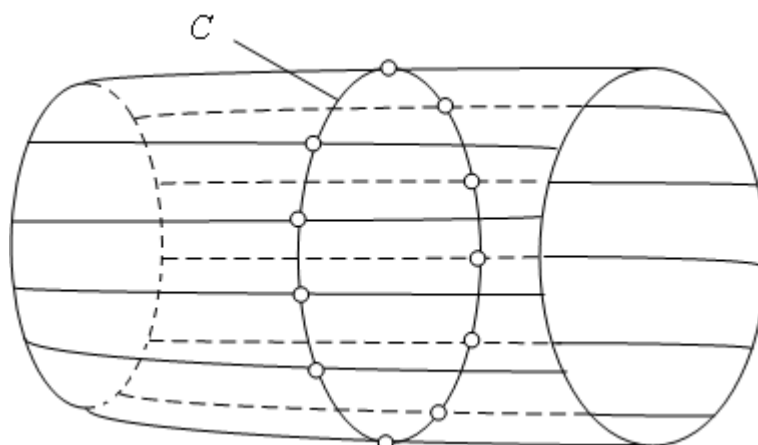


Fig. 4.6. Tubul de curent.

• *Secțiunea unui tub de curent* este o suprafață oarecare, străbătută de liniile de curent și limitată de tub; secțiunea poate fi normală (ortogonală sau dreaptă) sau nu.

• *Tubul elementar de curent* este tubul de curent a cărui secțiune normală este suficient de mică pentru a putea admite pe ea o distribuție uniformă a vitezelor și presiunilor

• *Firul de curent* este fluidul din interiorul unui tub elementar de curent.

• *Perimetrul ud* este linia de contact a lichidului cu pereții solid în secțiunea normală dată. În cazul curgerii sub presiune într-o conductă, acesta este perimetrul secțiunii conductei, spre deosebire de curgerile cu suprafață liberă, pentru care perimetrul ud nu conține și linia de contact cu atmosfera.

• *Raza hidraulică* este o mărime liniară dată de raportul între aria secțiunii normale și perimetrul ud $R = A/P$. Unitatea de măsură pentru raza hidraulică este metrul.

• *Debitul unui curent de fluid* printr-o suprafață orientată S este fluxul vectorului viteză prin acea suprafață

$$Q = \left| \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS \right| \quad \text{m}^3/\text{s} , \quad (4.4)$$

unde \vec{V} este vectorul viteză într-un punct al suprafeței S , iar \vec{n} este normala la suprafață în punctul considerat. Debitul definit prin relația (4.4) reprezintă volumul de fluid care trece prin suprafața S în unitatea de timp, $Q = dV/dt$, fiind numit și *debit volumic (de volum)*. Analog se poate

defini *debitul masic* (de masă) Q_M și *debitul gravimetric* (de greutate) Q_G prin formulele

$$Q_M = \frac{dm}{dt} = \left| \int_S \rho \vec{V} \vec{n} dS \right| \quad [\text{kg/s}] , \quad (4.5)$$

$$Q_G = \frac{dG}{dt} = g Q_M \quad [\text{N/s}] . \quad (4.6)$$

• *Viteza medie* a fluidului printr-o suprafață se poate defini cu formula

$$V_{med} = \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \int_S \vec{V} \vec{n} dS . \quad (4.7)$$

• *Circulația vitezei* de-a lungul unei curbe oarecare AB se definește prin integrala curbilinie

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} d\vec{s} = \int_{AB} V_t ds , \quad (4.8)$$

unde $d\vec{s}$ este elementul de arc al curbei AB , orientat, iar V_t este componenta tangențială a vitezei.

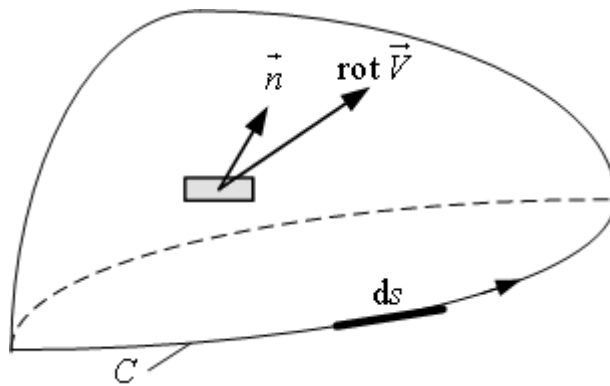


Fig. 4.7. Circulația pe curba închisă C .

În cazul în care curba de-a lungul căreia se face integrarea este o curbă simplă închisă (C), atunci circulația vitezei pe curba închisă (C)

poate fi exprimată cu ajutorul unei integrale de suprafață. Dacă suprafața S este o suprafață oarecare care se sprijină pe curba (C) , atunci se poate aplica teorema lui Stokes

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} dS . \quad (4.9)$$

Pentru mișcări rotaționale există noțiuni specifice.

- *Vectorul vârtej* al unei particule de fluid este vectorul definit prin egalitatea

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} . \quad (4.10)$$

Mișcarea unui fluid se numește *rotațională* dacă în domeniul ocupat de fluidul în mișcare $\vec{\omega} \neq 0$. Mișcarea unui fluid se numește *irotațională* (*potențială*) dacă în tot domeniul ocupat de fluidul în mișcare rotorul vitezei este nul $\vec{\omega} = 0$.

- *Linia de vârtej* la momentul t este curba tangentă la vectorii vârtej ai particulelor care la un moment dat se găsesc în punctele de pe această curbă. Rezultă ecuațiile diferențiale ale liniilor de vârtej,

$$\vec{\omega} \times d\vec{r} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} . \quad (4.11)$$

- *Suprafața de vârtej* reprezintă totalitatea liniilor de vârtej ce trec printr-o curbă ce nu este linie de vârtej. Dacă această curbă este închisă, suprafața de vârtej formează un *tub de vârtej*.

- *Intensitatea unui tub de vârtej* se definește ca dublul fluxului vectorului vârtej printr-o secțiune oarecare S a tubului,

$$I(S, \vec{n}) = 2 \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} dS . \quad (4.12)$$

Aplicația 4.1

În mișcarea permanentă plană a unui fluid incompresibil, câmpul vitezelor are expresia $\vec{V} = x\vec{i} - y\vec{j}$. Să se determine viteza și accelerația în punctul $A(1,2)$ și să se scrie ecuația liniei de curent care trece prin acest

punct. Să se scrie ecuațiile traiectoriei particulei fluide care la momentul $t = 0$, se afla în punctul A .

Soluție

$$u = x, \quad v = -y.$$

Viteza în punctul A are componentele $u = 1 \cdot 1 = 1 \text{ m/s}$, $v = -1 \cdot 2 = -2 \text{ m/s}$.
Componentele accelerației sunt

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot 1 - y \cdot 0 = x, \quad a_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot 0 - y \cdot (-1) = y$$

și se obține

$$a_x(1, 2) = 1 \text{ m/s}^2, \quad a_y(1, 2) = 2 \text{ m/s}^2.$$

Ecuațiile liniilor de curent sunt

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \ln x = -\ln y + C' \Rightarrow xy = C.$$

Impunând condiția ca hiperbola de ecuație $xy = C$ să treacă prin punctul A se determină constanta C , rezultând $C = 2$.

Ecuațiile traiectoriei sunt

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u = x, \\ \frac{dy}{dt} = v = -y, \end{cases}$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Rezultă
$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t \\ y(t) = C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Constantele C_1 și C_2 se calculează din condițiile inițiale. Se obține:

$$\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = 2e^{-t}. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului t rezultă hiperbola $xy = 2$.

4.2. Teorema lui Lagrange și teoremele lui Helmholtz pentru mișcări rotaționale

Mișcările rotaționale sunt adeseori întâlnite în tehnică și prezintă o importanță practică deosebită. În continuare se prezintă câteva din teoremele fundamentale ale vârtejurilor.

Teorema lui Lagrange

Fie D_0 un domeniu fluid și $D(t)$ imaginea sa la momentul t . Domeniul $D(t)$ este format din aceleași particule fluide care la momentul $t = t_0$ ocupau domeniul D_0 . Mișcarea se numește irotațională în domeniul D , dacă $\text{rot } \vec{V} = 0$ în orice punct din domeniu.

În ipotezele: câmpul forțelor masice admite un potențial U , $\vec{F}_m = -\text{grad } U$ și fluidul este barotrop $\rho = \rho(p)$, caracterul de irotaționalitate al mișcării se conservă [26].

În concluzie, dacă mișcarea este irotațională în D_0 , atunci va fi irotațională și în $D(t)$, iar dacă mișcarea este rotațională în D_0 , atunci va fi rotațională și în $D(t)$.

Teoremele lui Helmholtz relative la tuburi de vârtejuri

Fie C o curbă închisă și fie tubul de vârtej la momentul t , generat de curba C . Se consideră două secțiuni arbitrare S_1 și S_2 ale tubului de vârtej și se notează cu S_L suprafața laterală a tubului.

Prima teoremă a lui Helmholtz

Intensitatea tubului de vârtej este constantă în lungul acestuia,

$$I(S_1, \vec{n}_1) = I(S_2, \vec{n}_2). \quad (4.13)$$

Pentru demonstrație, se consideră un tub de vârtej care ocupă la momentul t un domeniu $D(t)$, mărginit de suprafața $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_L$ (fig. 4.8).

Se notează cu \vec{n} normala exterioară la frontiera ∂D și anume $\vec{n}|_{S_1} = -\vec{n}_1$, $\vec{n}|_{S_2} = \vec{n}_2$, $\vec{n}|_{S_L} = \vec{n}_L$.

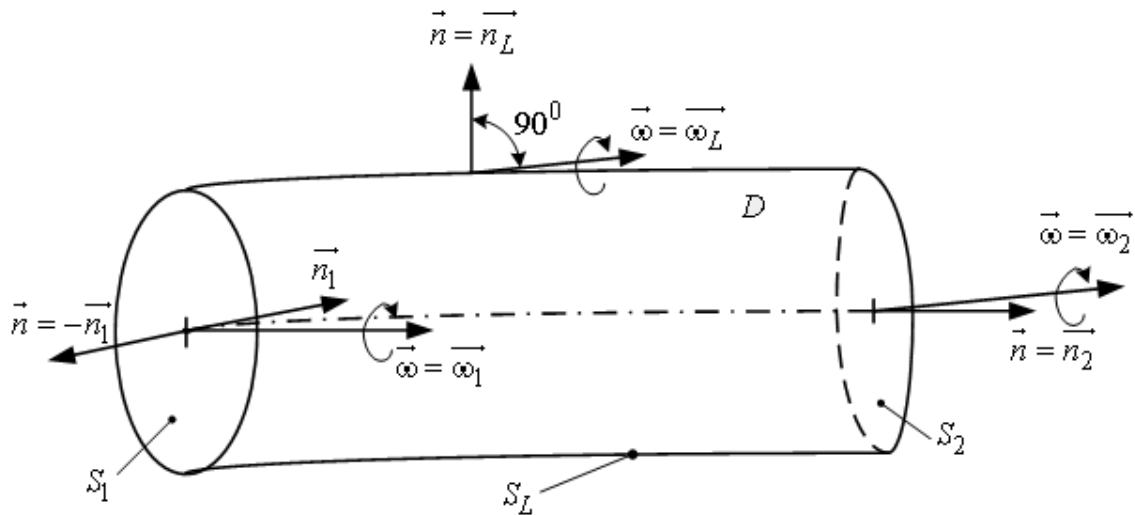


Fig. 4.8. Tubul de vârtej.

Utilizând teorema lui Gauss și Ostrogradski și condiția de solenoidalitate a câmpului vârtej, $\text{div } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{div rot } \vec{V} = 0$, se observă că fluxul vârtejului $\vec{\omega}$ printr-o suprafață închisă este egal cu zero,

$$\iint_{\partial D} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \text{div } \vec{\omega} \, d\tau = 0; \quad (4.14)$$

rezultă

$$\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_L} \vec{\omega} \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{\omega} \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{\omega} \vec{n} d\sigma + \iint_{S_L} \vec{\omega} \vec{n} d\sigma = 0 . \quad (4.15)$$

Ultima integrală este nulă deoarece $\vec{\omega} \perp \vec{n}$ pe suprafața S_L . Se obține

$$-\iint_{S_1} \vec{\omega}_1 \vec{n}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \vec{\omega}_2 \vec{n}_2 d\sigma = 0 \quad \text{sau} \quad 2 \iint_{S_1} \vec{\omega}_1 \vec{n}_1 d\sigma = 2 \iint_{S_2} \vec{\omega}_2 \vec{n}_2 d\sigma . \quad (4.16)$$

Întrucât secțiunile S_1, S_2 sunt arbitrare, $I(S_1, \vec{n}_1) = I(S_2, \vec{n}_2)$ și teorema este demonstrată.

Intensitatea tubului de vârtej poate fi calculată luând ca secțiune orice suprafață Σ care se sprijină pe curba suport C . Orientarea \vec{n} a lui Σ determină unic sensul de parcurs a lui C (fig. 4.9). Intensitatea tubului de vârtej se calculează cu ajutorul teoremei lui Stokes.

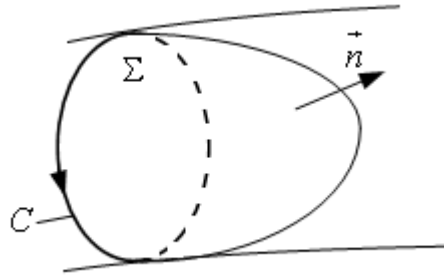


Fig. 4.9. Definirea intensității tubului de vârtej.

Intensitatea tubului de vârtej este egală cu circulația vitezei pe curba suport C ,

$$I(\Sigma, \vec{n}) = 2 \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \vec{n} d\sigma = 2 \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{V} \vec{n} d\sigma = \oint_C \vec{V} d\vec{s} = \Gamma(C). \quad (4.17)$$

Un tub de vârtej nu se poate termina în fluid. Pentru a demonstra această afirmație se consideră un tub de vârtej elementar, în care variația vectorului vârtej în secțiunea transversală S este neglijabilă. Conform primei teoreme a lui Helmholtz,

$$\omega_1 S_1 = \omega_2 S_2 . \quad (4.18)$$

Dacă tubul de vârtej s-ar termina în fluid atunci $S_2 \rightarrow 0$ și $\omega_2 \rightarrow \infty$, ceea ce este imposibil. În natură se cunosc trei cazuri în care pot exista tuburi de vârtej:

- 1) cele două extremități ale tubului coincid formând inele de vârtej;
- 2) cele două extremități se află pe suprafața liberă, pe un perete solid sau eventual pe o suprafață de separație a fluidelor (în figura 4.10 sunt prezentate formele posibile ale unui tub de vârtej într-un domeniu fluid limitat);
- 3) una din extremități se depărtează la infinit (de exemplu, dâra aerodinamică).

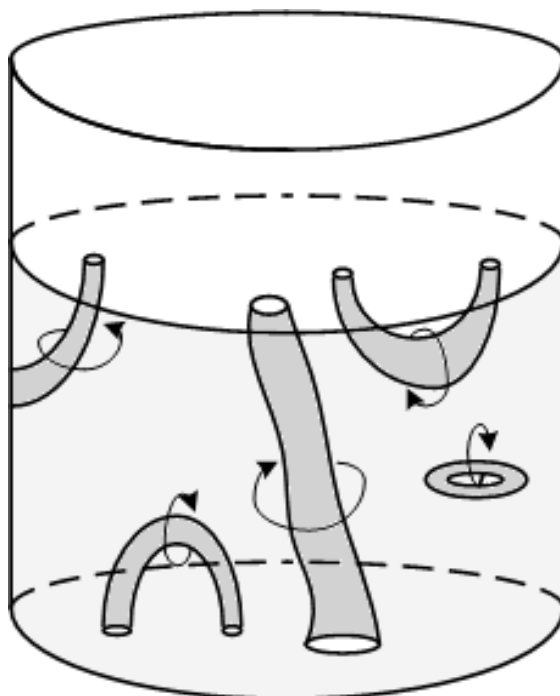


Fig. 4.10. Tipuri de tuburi de vârtej într-un domeniu fluid limitat.

A doua teoremă a lui Helmholtz

Într-un fluid nevâscos supus acțiunii forțelor masice potențiale, un tub de vârtej este constituit totdeauna din aceleași particule fluide .

A treia teoremă a lui Helmholtz

Într-un fluid nevâscos supus acțiunii forțelor potențiale, intensitatea tubului de vârtej este constantă în timp [25], [26] .

4.3. Ecuația continuității

Se numește *volum material* un volum de fluid $\Delta(t)$ limitat de o suprafață închisă $\Sigma(t)$, definită astfel încât viteza fiecărui punct $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ de pe suprafața Σ este aceeași cu viteza particulei fluide care se găsește în acest punct. Volumul material se deplasează odată cu fluidul și conține aceleași particule fluide, iar suprafața Σ este impermeabilă.

Se numește *volum de control* \mathcal{V} , un volum limitat de suprafața de control închisă S , astfel încât fiecare punct al suprafeței se deplasează cu viteza $\vec{V}_0(\vec{r}, t)$, diferită de viteza particulei fluide $\vec{V}(\vec{r}, t)$ care trece prin acest punct la momentul considerat. Suprafața S este perfect permeabilă și în general nedeformabilă.

4.3.1. Derivata totală, în raport cu timpul, a unei integrale pe un volum în mișcare

Fie volumul de control \mathcal{V} , limitat de suprafața S , ale cărei puncte se deplasează cu viteza $\vec{V}_0(\vec{r}, t)$ față de sistemul de coordonate $(Oxyz)$ (fig. 4.11).

Se notează $I = \iiint_{\mathcal{V}} \chi(\vec{r}, t) d\mathcal{V}$, unde χ este densitatea unei proprietăți, reprezentată printr-o funcție continuă și derivabilă în interiorul suprafeței de control. Interesează valoarea $\frac{dI}{dt}$. Conform definiției integralei,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \chi(\vec{r}, t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}(t)} \chi(\vec{r}, t) d\mathcal{V}}{\Delta t} \quad (4.19)$$

unde $\mathcal{V}(t)$ este volumul de control la timpul t , limitat de suprafața $AMBN$, $\mathcal{V}(t+\Delta t)$ volumul de control la momentul $t+\Delta t$ limitat de suprafața $A'M'B'N'$, iar $\chi(\vec{r}, t)$ câmpul densității proprietății considerate

la un moment t și $\chi(\vec{r}, t + \Delta t)$ câmpul densității proprietății considerate la un moment $t + \Delta t$;

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{V(t+\Delta t)} \chi(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} \chi(\vec{r}, t) dV}{\Delta t} + \\ + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{V(t+\Delta t)} \chi(\vec{r}, t) dV - \iiint_{V(t)} \chi(\vec{r}, t) dV}{\Delta t} = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

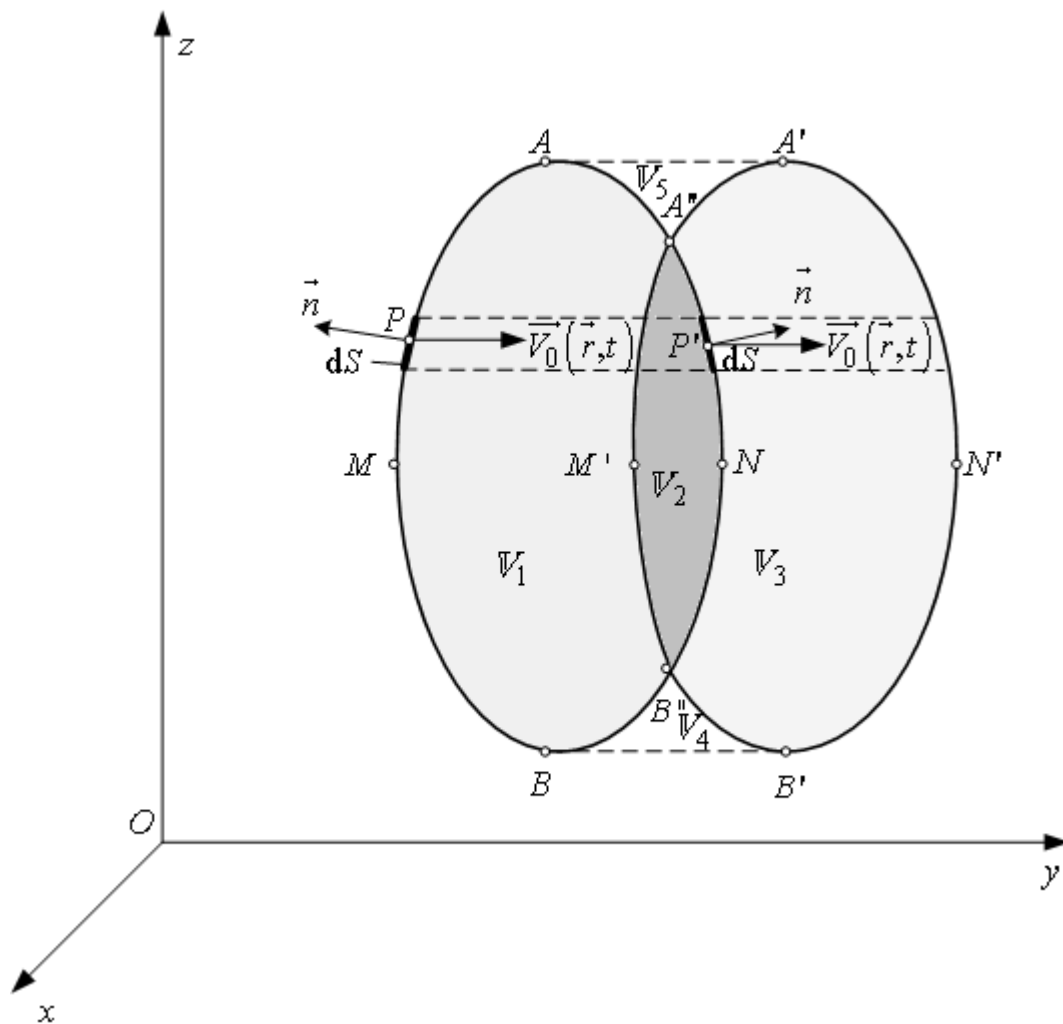


Fig. 4.11. Evoluția unui volum de control.

Primul termen al relației, notat cu I_1 , reprezintă derivata parțială sub semnul integrală a funcției $\chi(\vec{r}, t)$, în raport cu parametrul t ,

$$I_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\mathbb{V}(t+\Delta t)} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} - \iiint_{\mathbb{V}(t)} \chi(\vec{r}, t) d\mathbb{V}}{\Delta t} = \iiint_{\mathbb{V}} \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} d\mathbb{V}. \quad (4.21)$$

Pentru a calcula cel de-al doilea termen, notat cu I_2 , se observă că suprafața închisă de frontiera $AMBN$ și suprafața închisă de frontiera $A'M'B'N'$ au o parte comună mărginită de frontiera $A''M'B''N$, ce închide un volum \mathbb{V}_2 . Volumul închis de suprafața $AMBB''M'A''A$ se notează \mathbb{V}_1 , iar volumul închis de suprafața $A'N'B'B''N A''A'$ cu \mathbb{V}_3 . Se poate scrie

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\mathbb{V}(t+\Delta t)} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} - \iiint_{\mathbb{V}(t)} \chi(\vec{r}, t) d\mathbb{V}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\mathbb{V}_2} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} + \iiint_{\mathbb{V}_3} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} - \iiint_{\mathbb{V}_1} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} - \iiint_{\mathbb{V}_2} \chi(\vec{r}, t) d\mathbb{V}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\mathbb{V}_3} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V} - \iiint_{\mathbb{V}_1} \chi(\vec{r}, t+\Delta t) d\mathbb{V}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Observații

Fie un punct P de pe frontiera S a volumului $\mathbb{V}(t)$.

1) În intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ punctul P se deplasează în P' , distanța parcursă fiind $\overrightarrow{PP'} = \vec{V}_0 \Delta t$.

2) Suprafața AMB (numită suprafață de intrare) este acea parte a frontierei S pentru care $\vec{n} \overrightarrow{PP'} < 0$ și suprafața ANB (numită suprafață de ieșire) este acea parte a frontierei S pentru care $\vec{n} \overrightarrow{PP'} > 0$. Când P descrie AMB , vectorul $\overrightarrow{PP'}$ fiind dirijat spre interiorul domeniului \mathbb{V} , generează

domeniul $\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_4 \cup \mathbb{V}_5$. Domeniul $\mathbb{V}_3 \cup \mathbb{V}_4 \cup \mathbb{V}_5$ este generat de $\overrightarrow{PP'}$ când P descrie porțiunea de suprafață ANB .

3) Elementul de volum al domeniului $\mathbb{V}_3 \cup \mathbb{V}_4 \cup \mathbb{V}_5$ poate fi exprimat prin $d\mathbb{V} = +\overrightarrow{V_0} \vec{n} \Delta t dS$ pentru $dS \in S_{ANB}$ și elementul de volum al domeniului $\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_4 \cup \mathbb{V}_5$ poate fi exprimat prin $d\mathbb{V} = -\overrightarrow{V_0} \vec{n} \Delta t dS$ pentru $dS \in S_{AMB}$, deoarece $\vec{n} \overrightarrow{PP'} < 0$.

4) Volumele \mathbb{V}_4 și \mathbb{V}_5 pot fi adunate și scăzute fără a modifica valoarea integralei I_2 .

Ținând seama de aceste observații, integralele de volum din termenul I_2 al relației (4.20) se transformă în integrale de suprafață, astfel încât

$$I_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_{ANB}} \chi(\vec{r}, t) \overrightarrow{V_0} \vec{n} \Delta t dS - \iint_{S_{AMB}} \chi(\vec{r}, t) (-\overrightarrow{V_0}) \vec{n} \Delta t dS}{\Delta t} = \quad (4.23)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint \chi(\vec{r}, t) \overrightarrow{V_0} \vec{n} \Delta t dS}{\Delta t} = \oiint_S \chi(\vec{r}, t) \overrightarrow{V_0} \vec{n} dS,$$

deoarece punctele A'' și A' respectiv B'' și B' tind către A respectiv B , când $\Delta t \rightarrow 0$. În concluzie, derivata totală a integralei $I = \iiint_{\mathbb{V}} \chi(\vec{r}, t) d\mathbb{V}$ este

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{V}} \chi(\vec{r}, t) d\mathbb{V} = \iiint_{\mathbb{V}} \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} d\mathbb{V} + \oiint_S \chi(\vec{r}, t) \overrightarrow{V_0} \vec{n} dS. \quad (4.24)$$

Conform formulei integrale Gauss-Ostrogradski integrala pe suprafața S se transformă în integrală pe volumul \mathbb{V} și relația anterioară poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \chi(\vec{r}, t) d\mathcal{V} &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\chi(\vec{r}, t) \vec{V}_0) \right] d\mathcal{V} = \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{d\chi(\vec{r}, t)}{dt} + \chi(\vec{r}, t) \operatorname{div} \vec{V}_0 \right] d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Relațiile (4.24) și (4.25) reprezintă *teorema transportului (a lui Reynolds)*.

4.3.2. Ecuația continuității în cazul general

Pentru un volum de control ecuația continuității se deduce utilizând derivarea integralei pe un volum în mișcare (teorema transportului), unde densitatea proprietății este masa volumică sau densitatea ρ a fluidului,

$$\chi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t). \quad (4.26)$$

Se obține relația

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{V}_0 \cdot \vec{n} dS. \quad (4.27)$$

Se consideră că volumul de control \mathcal{V} este și un volum material, la momentul t , așadar $\vec{V}_0 = \vec{V}$. Utilizându-se relația Gauss-Ostrogradski se deduce

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\vec{r}, t) \vec{V}) \right] d\mathcal{V}, \quad (4.28)$$

sau

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} + \rho(\vec{r}, t) \operatorname{div} \vec{V} \right] d\mathcal{V}. \quad (4.29)$$

Pentru un volum material este valabilă legea conservării masei (2.7)

$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{V}} \rho d\tau = 0$. Pentru un volum material oarecare $\Delta \subseteq \mathbb{V}$, legea

conservării masei devine

$$\iiint_{\Delta} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] d\tau = 0, \quad \forall \Delta \subseteq \mathbb{V} \quad (4.30)$$

sau

$$\iiint_{\Delta} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} \right] d\tau = 0 \quad \forall \Delta \subseteq \mathbb{V}. \quad (4.31)$$

În cele ce urmează se enunță **lema fundamentală**: *dacă pentru o funcție scalară, vectorială sau tensorială $f(\vec{r})$, definită și continuă într-un domeniu Δ , este valabilă egalitatea $\int_{\Delta} f(x) d\tau = 0$, $\forall \Delta \subseteq \mathbb{V}$ atunci $f(\vec{r}) \equiv 0$ în \mathbb{V} .*

Conform acestei leme dacă $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V})$, respectiv $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V}$ sunt funcții continue, atunci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (4.32)$$

sau

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (4.33)$$

Ecuația continuității se scrie și sub forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.34)$$

sau

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 . \quad (4.35)$$

Cazuri particulare

1. Mișcarea permanentă, fluidul compresibil

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 . \quad (4.36)$$

2. Mișcarea permanentă sau nepermanentă, fluid incompresibil

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (4.37)$$

Aplicația 4.2.

Componentele vitezei unei curgeri bidimensionale sunt $u = -y$ și $v = x$.

a) Să se precizeze dacă aceste componente satisfac ecuația continuității pentru un fluid incompresibil.

b) Să se arate că cercul $x^2 + y^2 = a^2$ este o linie de curent.

Soluție

a) Ecuația continuității pentru un fluid incompresibil bidimensional este

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Se observă că ecuația continuității este satisfăcută.

b) Din ecuațiile diferențiale ale liniilor de curent se obține succesiv

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx + ydy = 0$$

și rezultă $x^2 + y^2 = \text{const.}$ Se poate considera constanta egală cu a^2 și se obține $x^2 + y^2 = a^2$.

Familia de curbe reprezentând liniile de curent este o familie de cercuri care cuprinde și cercul în discuție.

4.3.3. Ecuația continuității pentru un tub de curent oarecare

În multe aplicații practice, cum este cazul curgerii prin conducte circulare, interesează forma ecuației de continuitate pentru un tub de curent.

Se consideră un tub de curent cu suprafața laterală S_L și două secțiuni transversale S_1 , suprafața de intrare și S_2 , suprafața de ieșire (fig. 4.12). Tubul de curent fiind un volumul de control \mathcal{V} , mărginit de suprafața $S = S_1 \cup S_2 \cup S_L$, este valabilă ecuația continuității

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \oiint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (4.38)$$

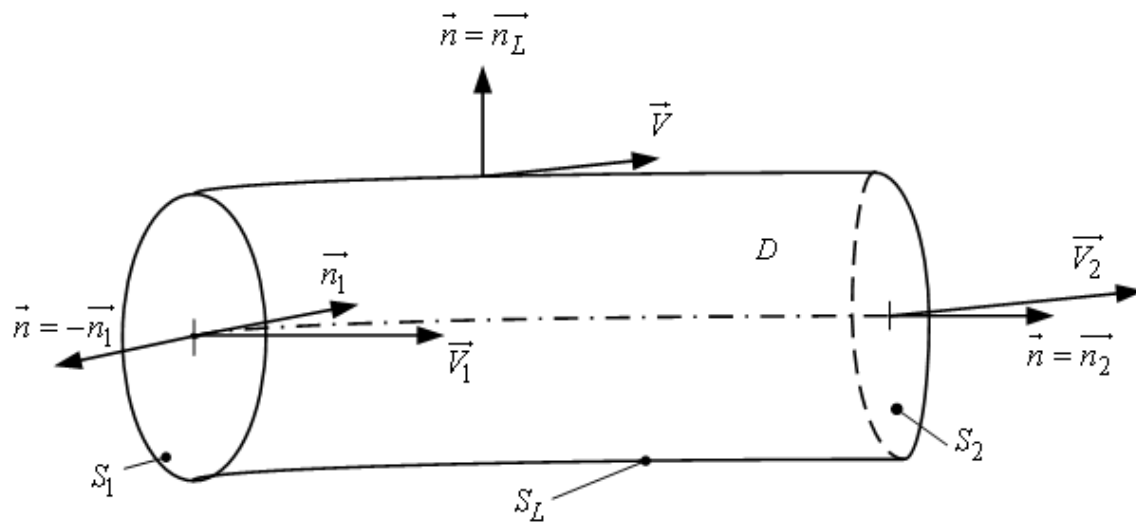


Fig. 4.12. Tubul de curent oarecare.

Normala exterioară are valorile $\vec{n} = -\vec{n}_1$ pe suprafața de intrare S_1 , $\vec{n} = \vec{n}_2$ pe suprafața de ieșire S_2 și $\vec{n} = \vec{n}_L$ pe suprafața laterală S_L . Deoarece pe S_L , $\vec{V} \perp \vec{n}$, rezultă că $\iiint_{S_L} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$ și relația (4.38) devine

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = 0; \quad (4.39)$$

rezultă

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 - \iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = Q_{M_2} - Q_{M_1}. \quad (4.40)$$

Ecuția continuității pentru un tub de curent se interpretează astfel: variația masei de fluid dintr-un tub de curent în unitatea de timp este egală cu diferența dintre debitul masic intrat în tubul de curent și debitul masic ieșit din tubul de curent.

Cazuri particulare

1. Mișcarea permanentă $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, fluid compresibil,

$$\iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = Q_M. \quad (4.41)$$

Debitul masic prin orice secțiune a tubului de curent este constant.

2. Fluid incompresibil, mișcare permanentă sau nepermanentă,

$$\iint_{S_2} \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \iint_{S_1} \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = Q. \quad (4.42)$$

Debitul volumic prin orice secțiune a tubului de curent este constant.

4.3.4. Ecuația continuității pentru un tub de curent elementar

Curgerea fluidului într-un tub de curent elementar poate fi considerată unidimensională, poziția unui punct oarecare pe axa tubului fiind determinată de o singură coordonată, abscisa curbilinie s . Viteza \vec{V} are o singură componentă $V(s, t)$.

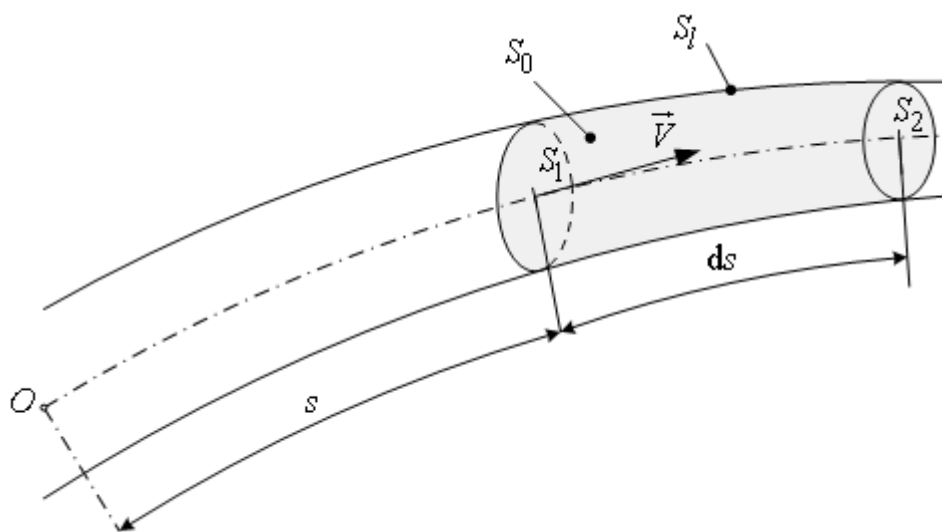


Fig. 4.13. Suprafața de control pentru un tub de curent elementar.

Fie o suprafață de control S_0 formată din două secțiuni normale S_1 și S_2 , situate la distanța ds măsurată în lungul axei tubului de curent și din suprafața laterală corespunzătoare S_l (fig. 4.13). Se consideră că particulele de fluid de densitate ρ , care traversează secțiunea de intrare S_1 de arie S , au viteza de modul V . Conform principiului conservării masei, creșterea masei fluidului conținut în volumul de control în intervalul de timp dt este egală cu diferența dintre masa de fluid intrată prin secțiunea S_1 și masa de fluid ieșită prin secțiunea S_2 ,

$$\left(\rho S ds + \frac{\partial(\rho S ds)}{\partial t} dt \right) - \rho S ds = \rho V dt S - \left(\rho V dt S + \frac{\partial(\rho V dt S)}{\partial s} ds \right) \quad (4.43)$$

deci,

$$\frac{\partial(\rho S ds)}{\partial t} dt = - \frac{\partial(\rho V dt S)}{\partial s} ds . \quad (4.44)$$

Simplificând, se obține ecuația continuității pentru mișcarea permanentă a unui fluid compresibil într-un tub de curent elementar de secțiune variabilă,

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V S)}{\partial s} = 0 . \quad (4.45)$$

Cazuri particulare

1) Pentru o mișcare nepermanentă a unui fluid compresibil, pereții tubului fiind rigizi $\partial S / \partial t = 0$, ecuația de continuitate devine

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V S)}{\partial s} = 0 . \quad (4.46)$$

2) Dacă se studiază mișcare nepermanentă a unui fluid incompresibil, pereții tubului fiind rigizi și de secțiune constantă în lungul tubului, $\partial S / \partial t = 0$ și $\partial S / \partial s = 0$, ecuația de continuitate este

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial s} = 0 . \quad (4.47)$$

3) Pentru mișcarea nepermanentă a unui fluid incompresibil, într-un tub de secțiune variabilă $S = S(s, t)$, ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(V S)}{\partial s} = 0 . \quad (4.48)$$

4) Dacă mișcarea este permanentă și fluidul compresibil, conform ecuației de continuitate, debitul masic este constant în lungul tubului de curent și relația (4.45) rezultă

$$\rho V S = const . \quad (4.49)$$

5) Pentru mișcarea permanentă a unui fluid incompresibil, relația ecuația continuității are expresia

$$V S = \text{const}, \quad (4.50)$$

deci debitul volumic este constant în lungul tubului de curent.

4.4. Clasificarea mișcărilor

Mișcările fluidelor pot fi clasificate după diferite criterii.

1) După criteriul variației în spațiu a parametrilor mișcării se disting:

- *curgeri spațiale (tridimensionale)* pentru care componentele vectorului viteză depind de coordonatele x_1, x_2, x_3 ale punctului și de timpul t , deci $\vec{V} = \vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$;

- *curgeri plane (bidimensionale)* pentru care vectorii viteză rămân paraleli unui plan fix (plan director) și componentele vectorului viteză depind numai de coordonatele x_1, x_2 și eventual de timpul t , deci, $\vec{V} = \vec{V}(x_1, x_2, t)$;

- *curgeri liniare (unidimensionale)*, pentru care viteza depinde de o singură coordonată, de obicei curbilinie s și de timp, $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$.

2) După criteriul variației în timp a parametrilor mișcării curgerile se împart în:

- *permanente (staționare)*;
- *nepermanente (nestaționare)*.

Parametrii mișcărilor permanente, viteză, presiune, masă volumică, nu depind de timp. În acest caz, liniile de curent sunt curbe fixe, independente de timp, confundate cu traiectoriile.

O mișcare este nepermanentă când câmpul vitezelor, al presiunilor și al masei volumice depind de coordonatele x_1, x_2, x_3 și de timpul t . În general într-o mișcare nepermanentă, traiectoriile și liniile de curent nu coincid. Dacă vectorii viteză au direcții fixe în fiecare punct din spațiu,

însă intensități variabile cu timpul mișcarea este *semipermanentă*, liniile de curent și traiectoriile coincidând.

3) După criteriul naturii conturului tubului de curent se disting:

- *curenți cu suprafață liberă*, pentru care o parte a secțiunii transversale a lichidului este o suprafață liberă, în contact cu presiunea atmosferică;
- *curenți sub presiune*, când întregul contur este mărginit de pereți solizi, presiunea fluidului fiind diferită de presiunea atmosferică;
- *jeturi de fluid*, caracterizate de faptul că de-a lungul curentului, pe conturul secțiunii transversale, fluidul este în contact cu un alt fluid.

4) După criteriul modului de desfășurare a mișcării în lungul curentului se discern:

- *mișcări uniforme*, un caz particular de mișcare permanentă în care vitezele sunt nu numai constante în timp ci și egale ca intensitate în toate punctele, liniile de curent fiind paralele;
- *mișcări neuniforme* caracterizate prin variația vitezelor, a adâncimilor și a ariilor secțiunilor normale în lungul curentului;

5) După criteriul tipului câmpului vitezelor se remarcă:

- *mișcări potențiale* sau *mișcări irotaționale*, pentru care $\vec{V} = \text{grad } \varphi$, deci $\text{rot } \vec{V} = 0$;
- *mișcări nepotențiale* sau *mișcări rotaționale (turbionare)*, pentru care $\text{rot } \vec{V} \neq 0$ și există un câmp de vectori vârtej asociat câmpului de viteze \vec{V} .

6) După criteriul regimului de curgere se împart în:

- *mișcări laminare*;
- *mișcări turbulente*.

Curgerea laminară este o curgere ordonată, fără pulsații ale vitezelor și fără amestecul particulelor care se deplasează pe straturi, conservându-și individualitatea și traiectoriile.

Curgerea turbulentă se caracterizează prin pulsații de viteze și amestecul particulelor fluide deviate de la curgerea principală în direcții diverse și antrenate în mișcări rotaționale. Traiectoriile sunt dezordonate, imprevizibile și conduc la o difuzie rapidă.

Capitolul 5

DINAMICA FLUIDELOR NEVÂSCOASE

Dinamica fluidelor studiază mișcarea fluidelor și interacțiunile lor cu corpurile solide, ținând seama de forțele care determină sau modifică starea de mișcare și de transformările energetice produse în timpul mișcării.

Fenomenele de mișcare ale fluidelor sunt deosebit de complexe. Din acest motiv s-a apelat la scheme simplificate de fluid. Un asemenea model este fluidul nevâscos (ideal). Fluidul nevâscos reprezintă o primă etapă în abordarea studiului mișcării fluidelor reale.

5.1. Ecuațiile Euler pentru dinamica fluidelor nevâscoase

În toate mediile apar tensiuni tangențiale, care se opun alunecării straturilor unele peste altele. La fluide, în general aceste tensiuni sunt mici. Când se pot considera neglijabile, fluidul este considerat *nevâscos* sau *ideal*. Fluidul nevâscos este definit ca având tensiunile tangențiale nule, tensiunile fiind colinare cu normala la elementul de suprafață. Ecuația constitutivă a fluidului nevâscos este

$$\vec{T} = -p \vec{I} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

unde $\vec{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ este tensorul unitate.

Pentru stabilirea ecuațiilor de mișcare ale fluidelor nevâscoase se apelează la ecuația lui Cauchy (2.55) și ecuația constitutivă (5.1). Se obține ecuația lui Euler pentru dinamica fluidelor nevâscoase, sub formă vectorială

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (5.2)$$

Sub formă indicială, ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase sunt

$$a_i = F_{mi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (5.3)$$

Ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase se pot scrie și proiectând relația vectorială (5.2) pe axele de coordonate Ox , Oy , Oz ,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Sistemul are trei ecuații și cinci necunoscute: trei componente ale vitezei $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, presiunea $p(x, y, z)$ și densitatea $\rho(x, y, z, t)$. Pentru a pune în concordanță numărul de ecuații cu numărul de necunoscute se adăuga două ecuații, ecuația continuității și

ecuația de stare $\rho = \rho(p)$ pentru un fluid barotrop (un fluid este barotrop dacă masa sa volumică ρ este funcție numai de presiune și reciproc).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ \rho = \rho(p). \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Pentru un fluid incompresibil $\rho = \text{const}$, în mișcare nepermanentă este suficient un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute și anume

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

În marea majoritate a aplicațiilor tehnice din Mecanica Fluidelor temperatura este constantă și nu interesează, fiind suficientă completarea sistemului de ecuații cu ecuația de stare pentru un fluid barotrop $\rho = \rho(p)$. Într-o tratare mai generală ecuația de stare a fluidului este $f(p, \rho, T) = 0$. În acest caz apare și o a șasea necunoscută temperatura T , ceea ce înseamnă că este necesară o a șasea ecuație, furnizată de regulă de primul principiu al Termodinamicii.

Semnificația termenilor pentru sistemul de ecuații ce descriu mișcarea fluidelor nevâskoase este

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} , \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} , \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} .
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

*componen-
ta locală
a forțelor
de inerție
pe unita-
tea de masă*
*componenta convectivă
a forțelor de inerție
pe unitatea de masă*
*forța ex-
terioară,
masică
pe unitatea
de masă*
*forța su-
perficia-
lă de pre-
siune, pe
unitatea
de masă*

Soluția sistemului format din ecuațiile Euler și ecuația continuității trebuie să satisfacă condițiile inițiale și condițiile la limită impuse de problema concretă de mișcare fluidă studiată.

Condiții inițiale și condiții la limită necesare integrării ecuațiilor de mișcare ale fluidelor nevâscoase

Soluția sistemului (5.6) trebuie să satisfacă condițiile inițiale și condițiile la limită. Condițiile inițiale sunt condițiile care se impun câmpului vitezelor și câmpului presiunii la un moment dat t_0 considerat moment inițial. Condițiile inițiale sunt

$$\begin{cases} u(x, y, z, t_0) = u_0 , \\ v(x, y, z, t_0) = v_0 , \\ w(x, y, z, t_0) = w_0 , \\ p(x, y, z, t_0) = p_0 , \\ \rho(x, y, z, t_0) = \rho_0 ; \end{cases} \tag{5.8}$$

u_0, v_0, w_0, p_0 sunt funcții cunoscute de coordonatele x, y, z .

Condițiile inițiale sunt necesare numai în studiul mișcării nepermanente. Condițiile la limită sunt condiții care trebuie verificate pe frontierele curentului de fluid de viteze (condiții la limită cinematice) și de presiune (condiții la limită dinamice).

Condiții la limită cinematice

Se consideră într-un plan xOy , un corp solid de contur C fix, în jurul căruia se deplasează un fluid nevâscos, compresibil, barotrop .

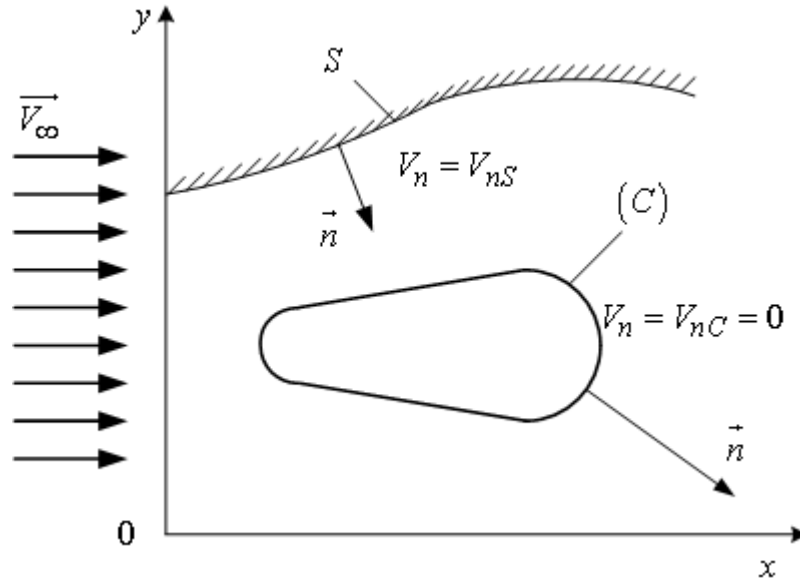


Fig. 5.1. Condiții la limită cinematice în cazul mișcării unui fluid nevâscos în jurul unui corp solid fix.

La distanță mare de corp, curgerea nu este perturbată de prezența corpului, așadar *condiția la limită la infinit* este descrisă prin relația

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \vec{V}(P, t) = \vec{V}_{\infty} . \quad (5.9)$$

Se notează cu V_{nC} componenta normală a vitezei unui punct solid aparținând frontierei C a corpului și cu V_n componenta normală a vitezei particulei de fluid care se află în momentul considerat în imediata vecinătate a aceluși punct; rezultă condiția

$$V_n = V_{nC} . \quad (5.10)$$

Această relație constituie *condiția la limită cinematică pe suprafața C a corpului*, sau *condiția de impermeabilitate*. Relația se demonstrează prin reducere la absurd. Dacă $V_n < V_{nC}$, particula ar pătrunde prin suprafața corpului. Dacă $V_n > V_{nC}$, particula fluidă s-ar desprinde de corp, ceea ce contrazice condiția de mediu continuu. Pentru un corp fix,

$$V_n = V_{nC} = 0 . \quad (5.11)$$

Prin urmare viteza unei particule de fluid pe suprafața unui corp are numai componentă tangențială. În ipoteza fluidului nevâscos conturul oricărui corp solid plasat într-un curent de fluid este o suprafață de curent.

La distanță de corp, pentru o suprafață fixă S , componenta normală a vitezei particulei de fluid din vecinătatea suprafeței este nulă ca și componenta normală a vitezei punctului învecinat al suprafeței solide,

$$V_n = V_{nS} = 0. \quad (5.12)$$

Relația constituie condiția la limită cinematică pe suprafața fixă S , iar suprafața S este o suprafață de curent.

Condiții la limită dinamice

Condițiile la limită dinamice sunt condițiile care se impun presiunii care se exercită pe anumite frontiere ale fluidului în mișcare sau la infinit. O condiție la limită dinamică precizează valorile presiunii la infinit

$$\lim_{P \rightarrow \infty} p(P, t) = p_\infty. \quad (5.13)$$

Una dintre cele mai uzuale condiții la limită dinamice este condiția pe suprafața liberă S_0 a unui lichid,

$$p = p_0|_{S_0}. \quad (5.14)$$

Presiunea p_0 reprezintă presiunea la suprafața liberă, în general, cea atmosferică.

5.2. Teorema cantității de mișcare și teorema momentului cinetic

Teorema cantității de mișcare și teorema momentului cinetic pentru un volum de control

Se consideră un volum de control \mathcal{V} , limitat de suprafața de control închisă S , permeabilă, ale cărei elemente dS se deplasează cu viteza

$\vec{V}_0(\vec{r}, t)$. În interiorul volumului de control \mathcal{V} se găsesc în fiecare moment alte particule fluide ce pătrund prin suprafața S . Conform teoremei de transport (4.24) pentru proprietatea $\chi = \rho \vec{V}$,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_S (\rho \vec{V}) \vec{V}_0 \vec{n} dS.$$

Se consideră că la un moment dat volumul de control \mathcal{V} este un volum material. În aceste condiții $\vec{V} = \vec{V}_0$ și rezultă

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_S (\rho \vec{V}) (\vec{V} \vec{n}) dS. \quad (5.15)$$

Conform principiului variației cantității de mișcare se poate scrie

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} + \iint_S \vec{T} dS. \quad (5.16)$$

Pentru un fluid nevâscos, a cărui ecuație constitutivă este $\vec{T} = -p \vec{I}$, teorema cantității de mișcare are expresia

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_S [\rho \vec{V} (\vec{V} \vec{n})] dS = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \oint_S p \vec{n} dS. \quad (5.17)$$

Dacă mișcarea este permanentă, teorema se poate scrie sub forma

$$\oint_S [\rho \vec{V} (\vec{V} \vec{n})] dS = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \oint_S p \vec{n} dS. \quad (5.18)$$

Analog se deduce teorema momentului cinetic pentru un volum de control,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \frac{\partial (\vec{r} \times \rho \vec{V})}{\partial t} dV + \oint_S \vec{r} \times (\rho \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \\
& = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{F}_m dV - \oint_S \vec{r} \times p \vec{n} dS
\end{aligned} \tag{5.19}$$

pentru cazul mișcării nepermanente și

$$\oint_S \vec{r} \times (\rho \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{F}_m dV - \oint_S \vec{r} \times p \vec{n} dS \tag{5.20}$$

pentru cazul mișcării permanente.

Teorema cantității de mișcare și teorema momentului cinetic pentru un tub de curent

Fie un curent de fluid incompresibil care ocupă un volum de control V mărginit de o suprafață de control S , formată dintr-un tub de curent simplu și două secțiuni ortogonale direcției de curgere a curentului .

Frontiera volumului de control este $S = S_L \cup S_1 \cup S_2$. Se consideră S_L suprafața laterală a tubului de curent, S_1 suprafața de intrare a fluidului în tubul de curent și S_2 suprafața de ieșire a fluidului din tubul de curent. Se notează cu \vec{V}_1 viteza pe suprafața de intrare și cu \vec{V}_2 viteza pe suprafața de ieșire.

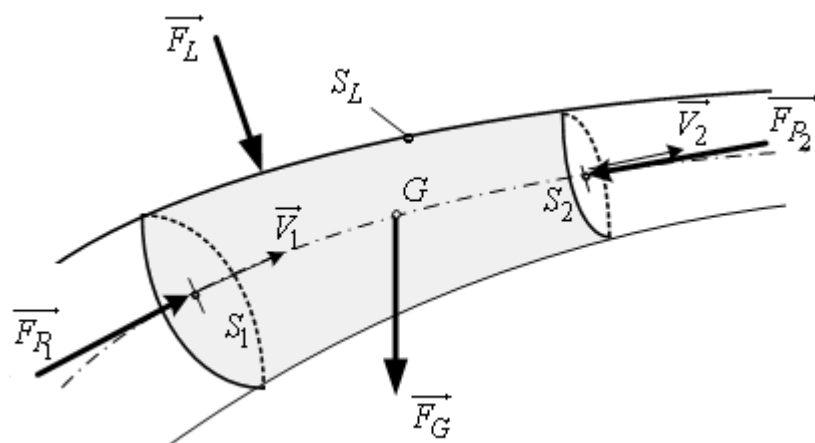


Fig. 5.2. Aplicarea teoremei cantității de mișcare unei mase de fluid din interiorul unui tub de curent.

Calculul torsorului forțelor de presiune pe frontiera tubului de curent trebuie să țină seama de existența presiunii din exteriorul acesteia (de regulă presiunea atmosferică $p_0 = p_{at}$), ceea ce impune considerarea termenilor nuli

$$\oiint_S p_0 \vec{n} dS = 0 \quad \text{și} \quad \oiint_S \vec{r} \times p_0 \vec{n} dS = 0. \quad (5.21)$$

Se aplică, volumului de control \mathcal{V} , teorema cantității de mișcare și teorema momentului cinetic în mișcare permanentă,

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_L} [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_L} (p - p_0) \vec{n} dS, \quad (5.22)$$

$$\oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_L} [\vec{r} \times \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \oiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_L} \vec{r} \times (p - p_0) \vec{n} dS. \quad (5.23)$$

Se dezvoltă aceste relații, considerând proprietatea de aditivitate a integralelor de suprafață,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_1 + \iint_{S_2} [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_2 + \iint_{S_L} [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_L = \\ & = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \iint_{S_1} (p - p_0) \vec{n} dS_1 - \iint_{S_2} (p - p_0) \vec{n} dS_2 - \iint_{S_L} (p - p_0) \vec{n} dS_L, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \vec{r}_1 \times [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_1 + \iint_{S_2} \vec{r}_2 \times [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_2 + \iint_{S_L} \vec{r}_L \times [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] dS_L = \\ & = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r}_G \times \rho \vec{F}_m d\mathcal{V} - \iint_{S_1} \vec{r}_1 \times (p - p_0) \vec{n} dS_1 - \iint_{S_2} \vec{r}_2 \times (p - p_0) \vec{n} dS_2 - \\ & - \iint_{S_L} \vec{r}_L \times (p - p_0) \vec{n} dS_L; \end{aligned} \quad (5.25)$$

\vec{r}_1 și \vec{r}_2 reprezintă vectorii de poziție ai centrelor suprafețelor S_1 și S_2 , iar \vec{r}_L și \vec{r}_G - vectorii de poziție ai punctelor de aplicație ai forțelor \vec{F}_L și \vec{F}_G .

Observații

1) Suprafața laterală este suprafață de curent, iar viteza este tangentă la peretele tubului, deci $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$.

2) Pe suprafața S_1 , $\vec{V} \cdot \vec{n} = -\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1$ deoarece $\vec{V} = \vec{V}_1$ și $\vec{n} = -\vec{n}_1$.

3) Pe suprafața S_2 , $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2$ deoarece $\vec{V} = \vec{V}_2$ și $\vec{n} = \vec{n}_2$.

4) Debitul care circulă printr-o suprafață oarecare S este

$$Q = \left| \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \right|.$$

5) În cazul în care forțele masice sunt datorate numai unui câmp gravitațional $\vec{F}_m = \vec{g}$, iar $\vec{F}_G = \iiint_V \rho \vec{g} \, dV$ este greutatea fluidului conținut

de volumul de control.

6) Forțele de presiune pe suprafața de intrare S_1 au rezultanta

$$\vec{F}_{P_1} = - \iint_{S_1} (p - p_0) \vec{n} \, dS_1 = -\vec{n}_1 \iint_{S_1} (p - p_0) \, dS_1.$$

7) Forțele de presiune pe suprafața de ieșire S_2 au rezultanta

$$\vec{F}_{P_2} = - \iint_{S_2} (p - p_0) \vec{n} \, dS_2 = -\vec{n}_2 \iint_{S_2} (p - p_0) \, dS_2.$$

8) Forța exercitată de suprafața laterală S_L asupra fluidului

$$\vec{F}_L = - \iint_{S_L} (p - p_0) \vec{n} \, dS_L.$$

Teorema cantității de mișcare pentru un tub de curent, în mișcarea permanentă a unui fluid incompresibil se scrie sub forma

$$\rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F}_G + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_2} + \vec{F}_L. \quad (5.26)$$

Teorema momentului cinetic pentru un tub de curent în mișcare permanentă a unui fluid incompresibil are expresia

$$\rho Q(\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{V}_1) = \vec{r}_G \times \vec{F}_G + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{P_1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{P_2} + \vec{M}_{F_L}. \quad (5.27)$$

În cele mai multe aplicații tehnice, fluidele vin în contact pe o parte din suprafața laterală sau pe toată această suprafață cu suprafețe solide. De regulă interesează să se determine forța exercitată de fluidul în mișcare asupra suprafețelor corpului solid cu care fluidul vine în contact,

$$\vec{F} = -\vec{F}_L = \rho Q(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) + \vec{F}_G + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_2} \quad (5.28)$$

și momentul corespunzător acestei forțe

$$-\vec{M}_{F_L} = \vec{r} \times \vec{F} = \rho Q(\vec{r}_1 \times \vec{V}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{V}_2) + \vec{r}_G \times \vec{F}_G + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{P_1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{P_2} \quad (5.29)$$

Vectorul de poziție al punctului de aplicație a forței \vec{F} se notează cu $\vec{r} = \vec{r}_L$.

Tipurile de aplicații tehnice ce utilizează teorema cantității de mișcare și teorema momentului cinetic pentru tuburi de curent pot fi clasificate astfel:

1) se modifică direcția și sensul vitezei, intensitatea ei rămânând aceeași (coturi de diametru constant, jeturi compacte care lovesc o suprafață solide);

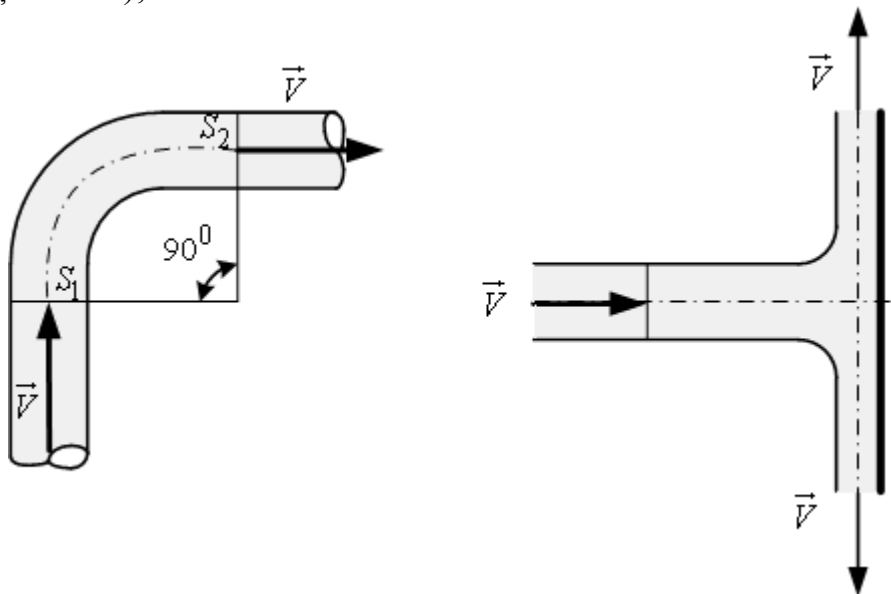


Fig. 5.3. Variația direcției și sensului vitezei fără a se modifica intensitatea.

2) se modifică intensitatea vitezei, sensul acesteia rămânând același (difuzoare, confuzoare, ajutaje);

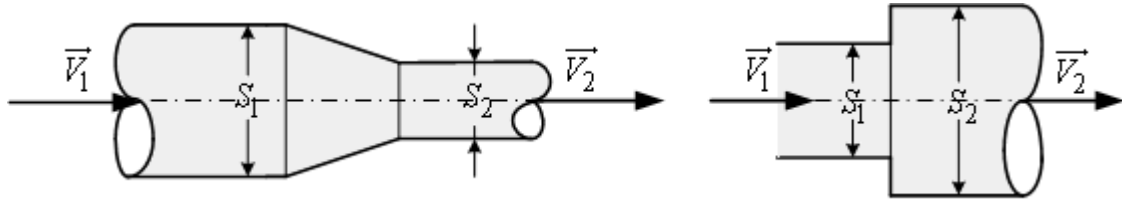


Fig. 5.4. Variația intensității vitezei fără a se modifica direcția și sensul.

3) se modifică atât mărimea cât și sensul vitezei (ramificații și coturi cu schimbare de secțiune);

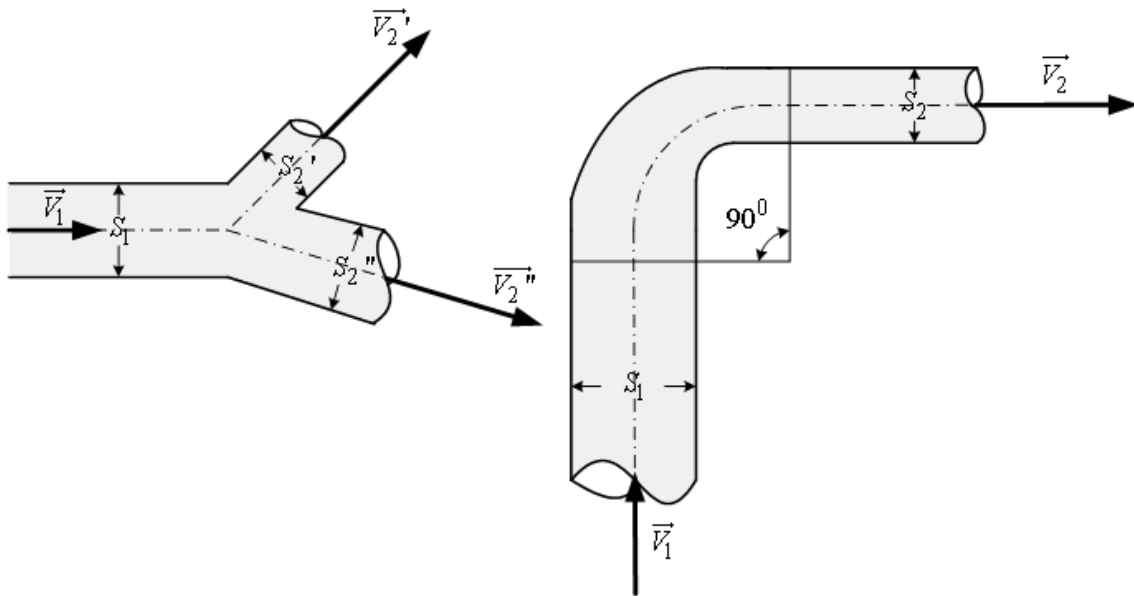


Fig. 5.5. Variația intensității și direcției vitezei.

În cazul unui tub de curent cu mai multe ramificații la intrare și la ieșire teoremele precedente devin

$$\vec{F} = \rho \sum_{i=1}^n Q_{1i} \vec{V}_{1i} - \rho \sum_{i=1}^m Q_{2i} \vec{V}_{2i} + \vec{F}_G + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{P_{1i}} + \sum_{i=1}^m \vec{F}_{P_{2i}}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{M_{F_L}} = \vec{r} \times \vec{F} = & \rho \sum_{i=1}^n Q_{1i} \vec{r}_{1i} \times \vec{V}_{1i} - \rho \sum_{i=1}^m Q_{2i} \vec{r}_{2i} \times \vec{V}_{2i} + \\
& + \vec{r}_G \times \vec{F}_G + \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_{P_{1i}} + \sum_{i=1}^m \vec{r}_{2i} \times \vec{F}_{P_{2i}} \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.31}$$

unde n este numărul secțiunilor de intrare, iar m numărul secțiunilor de ieșire. Se adaugă *condiția de continuitate*

$$\sum_{i=1}^n Q_{1i} = \sum_{i=1}^m Q_{2i} .
\tag{5.32}$$

Aplicația 5.1

Să se calculeze reacțiunea care apare în cotul unei conducte forțate așezate orizontal, cunoscând debitul apei prin conductă $Q = 9 \text{ m}^3/\text{s}$, viteza medie a apei $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V = 3 \text{ m/s}$ și presiunea $p = 3 \text{ bar}$, dacă deviația curgerii este $\alpha = 30^\circ$ (fig. 5.6).

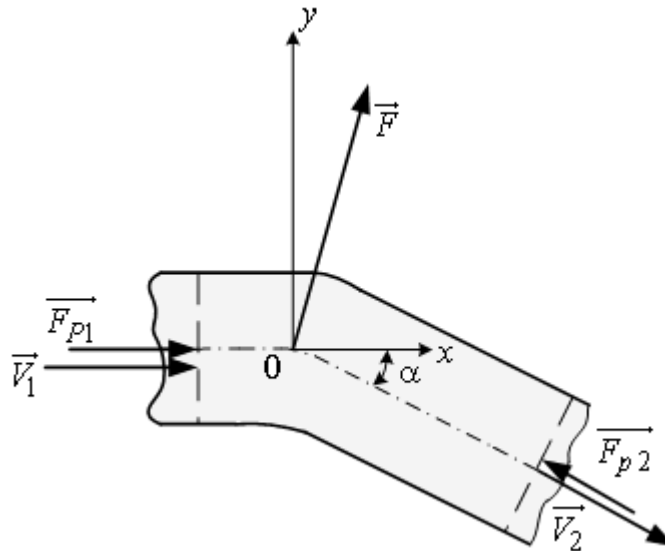


Fig. 5.6. Cot de secțiune constantă.

Soluție

Conform relației (5.28) asupra cotelui acționează forța

$$\vec{F} = \rho Q (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) + \vec{F}_G + \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} .$$

Se proiectează această relație pe direcțiile Ox , respectiv Oy . Forța de greutate \vec{F}_G acționează pe direcția verticală. Se obține

$$F_x = \rho Q (V - V \cos \alpha) + p \frac{Q}{V} - p \frac{Q}{V} \cos \alpha = Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) (1 - \cos \alpha),$$

$$F_y = \rho Q [0 - (-V \sin \alpha)] + 0 + p \frac{Q}{V} \sin \alpha = Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) \sin \alpha,$$

și rezultă

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left[Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) (1 - \cos \alpha) \right]^2 + \left[Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) \sin \alpha \right]^2} = \\ &= Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) \sqrt{1 + (\cos \alpha)^2 - 2 (\cos \alpha) + (\sin \alpha)^2} = \\ &= Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) \sqrt{2 [1 - (\cos \alpha)]} = 2 Q \left(\rho V + \frac{p}{V} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cdot 9 \cdot \left(3 \cdot 10^3 + \frac{3 \cdot 10^5}{3} \right) \cdot \sin 15^\circ = 479\,850 \text{ N} = 479,85 \text{ kN} . \end{aligned}$$

Se calculează

$$\begin{aligned} \arctg \left(\frac{F_y}{F_x} \right) &= \arctg \left(\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) = \arctg \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ . \end{aligned}$$

Unghiul format de reacțiunea \vec{F} cu axa Ox este de 75° .

5.3. Relația lui Bernoulli pentru fluide nevâscoase

5.3.1. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase sub forma Helmholtz și Gromeka-Lamb

Dacă în ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase (5.6) se grupează termenii sub o formă convenabilă se obțin ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase sub forma Helmholtz

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned}$$

*componen-
ta locală
a forțelor
de inerție
pe unita-
tea de
masă* *componenta
convectivă
a forțelor
de inerție da-
torită varia-
ției energiei
cinetice, pe
unitatea de
masă* *componenta convectivă
a forțelor de inerție da-
torită variației vârtejui,
pe unitatea de masă* *forța ex-
terioară
masică,
pe unita-
tea de
masă* *forța su-
perficia-
lă de pre-
siune, pe
unitatea
de masă*

(5.33)

Sub formă vectorială ecuația Helmholtz (5.33) este

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (5.34)$$

În cazul general aceste ecuații nu pot fi integrate. Dacă forțele masice derivă dintr-un potențial și fluidul este barotrop atunci

$$\vec{F}_m = -\text{grad} U_m \quad (5.35)$$

și

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \int \frac{dp}{\rho}. \quad (5.36)$$

Se obțin ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase sub forma Gromeka-Lamb,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Sub formă vectorială ecuațiile (5.37) pot fi scrise

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) + \text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = 0. \quad (5.38)$$

Expresia $\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m = \mathcal{B}$ este numită *funcția lui Bernoulli*. Termenii acestei expresii au dimensiunea de energie pe unitatea de masă și arată că energia totală E a fluidului este formată din energie cinetică $\frac{V^2}{2}$, energie potențială de presiune $\int \frac{dp}{\rho}$ și energie potențială a forțelor masice U_m .

Interpretare

Relația (5.38) în care se introduce funcția lui Bernoulli, se scrie pentru mișcarea nepermanentă sub forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad } \mathcal{B} + \text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = 0 \quad (5.39)$$

sau pentru mișcarea permanentă, sub forma

$$\text{grad } \mathcal{B} = \vec{V} \times \text{rot } \vec{V} . \quad (5.40)$$

Funcția lui Bernoulli \mathcal{B} este o funcție scalară, așadar produsul vectorial $\vec{V} \times \text{rot } \vec{V}$ este normal la suprafața $\mathcal{B} = \text{const}$. Dar $\vec{V} \times \text{rot } \vec{V}$ este normal atât lui \vec{V} cât și lui $\text{rot } \vec{V}$. În concluzie, suprafața $\mathcal{B} = \text{const}$ conține atât liniile de curent, cât și liniile de vârtej.

5.3.2. Deducerea relației lui Bernoulli pentru fluide nevâscoase

Relația lui Bernoulli ilustrează legea universală a conservării și transformării energiei. Ea reprezintă o integrală primă a ecuației de mișcare (5.38). Ecuațiile de mișcare sub formă integrală se obțin din ecuațiile de mișcare ale fluidelor nevâscoase sub forma Gromeka-Lamb, introducând componentele vectorului vârtej $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$,

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Se înmulțesc cele trei ecuații (5.37) cu deplasările elementare dx, dy, dz și se sumează. Se obține

$$\frac{\partial}{\partial t} (u dx + v dy + w dz) + d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 . \quad (5.41)$$

Sub o formă mai compactă relațiile (5.41) se pot scrie sub formă vectorială

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\vec{r} + d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) + (\text{rot } \vec{V} \times \vec{V}) d\vec{r} = 0 . \quad (5.42)$$

Se observă că ecuația (5.42) se poate obține direct din (5.38) prin înmulțirea scalară cu $d\vec{r}$.

Se observă că determinantul din relația (5.41) devine nul în următoarele cazuri:

a) $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, mișcarea este irotațională (potențială), $\text{rot } \vec{V} = 0$ sau $\vec{V} = \text{grad } \varphi$, deplasarea elementară $d\vec{r}$ fiind în lungul unei curbe oarecare;

b) $\frac{u}{\omega_x} = \frac{v}{\omega_y} = \frac{w}{\omega_z}$, mișcarea este elicoidală, $\text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = 0$,

deplasarea elementară $d\vec{r}$ fiind în lungul unei curbe oarecare.

c) $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, deplasarea elementară $d\vec{r}$ se face de-a lungul unei linii de curent, $\vec{V} \times d\vec{r} = 0$;

d) $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$, deplasarea elementară $d\vec{r}$ se face de-a lungul unei linii de vârtej, $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \times d\vec{r} = 0$;

Pentru aceste cazuri se poate scrie

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\vec{r} + d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) = 0. \quad (5.43)$$

Mișcarea potențială nepermanentă

În cazul mișcării potențiale,

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi \text{ și } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) d\vec{r} = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\vec{r} = d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

și ecuația diferențială (5.43) admite integrala

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m = C(t) \quad (5.44)$$

unde φ este potențialul vitezelor.

Relația (5.44) se numește *integrala lui Lagrange*. Funcția $C(t)$ depinde numai de timp, la un moment fixat fiind aceeași în toate punctele fluidului. În câmpul gravitațional $U_m = gz + \text{const}$ și integrala lui Lagrange este

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = C(t). \quad (5.45)$$

Scriind relația (5.44) între două puncte diferite, se deduce relația lui Bernoulli pentru mișcarea potențială nepermanentă a unui fluid incompresibil

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (5.46)$$

În cazul în care mișcarea este potențială permanentă, $(\partial \varphi / \partial t) = 0$ și constanta este aceeași în toate punctele fluidului. Integrala (5.44) devine

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m = C. \quad (5.47)$$

Relația (5.47) se numește în acest caz *integrala lui Euler*.

Mișcări permanente

Derivata parțială în raport cu timpul, primul termen din relația (5.44), se anulează.

Pe o **linie de curent** se obține *integrala lui Bernoulli*. Constanta rămâne aceeași numai de-a lungul unei linii de curent,

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m = C. \quad (5.48)$$

Integrala lui Bernoulli exprimă legea de conservare a energiei unei particule de masă unitară, cunoscută sub numele de teorema lui Bernoulli:

Energia mecanică totală, egală cu suma energiei cinetice, potențiale de presiune și potențiale a forțelor masice, este constantă de-a lungul unei linii de curent.

Pe o **linie de vârtej**, integrala ecuației diferențiale (5.44), cu $(\partial \vec{V} / \partial t) d\vec{r} = 0$, coincide formal cu (5.48), însă constanta este aceeași pentru două puncte situate de-a lungul liniei de vârtej.

În **mișcare elicoidală**, integrala obținută are de asemenea expresia (5.48) și se numește *integrala lui Gromeka*. Constanta C este aceeași în

toate punctele fluidului în mișcare elicoidală, pentru care liniile de curent și liniile de vârtej coincid.

În continuare, din punctul de vedere tehnic, interesează în mod special unele expresii ale relației Bernoulli în câmp gravitațional.

5.3.3. Forme particulare ale relației Bernoulli pe o linie de curent, în câmpul gravitațional

Se consideră relația (5.48) în câmpul gravitațional, $U_m = gz + const$,

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = const. \quad (5.49)$$

Se analizează principalele cazuri particulare.

Fluide incompresibile grele

Pentru mișcarea permanentă a fluidelor incompresibile ($\rho = const$),

$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + const$. Relația (5.49) devine

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C. \quad (5.50)$$

Constanta C diferă în general de la o linie de curent la alta. Pentru două puncte, notate cu 1 și 2, situate pe aceeași linie de curent, rezultă

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2. \quad (5.51)$$

Relația obținută se aplică pentru lichide (apa), dar și pentru gaze, în unele cazuri speciale (de exemplu pentru mișcarea aerului la coșurile de fum foarte înalte, la care variația energiei de poziție nu poate fi neglijată).

Fluide incompresibile ușoare

Fluidele ușoare se caracterizează prin forțe de greutate neglijabile în raport cu cele de inerție și de presiune. Pentru gaze supuse la variații mici de presiune, ce pot fi considerate incompresibile (de exemplu în cazul mișcării aerului în conducte de aerisire, sau într-un ventilator) se obține

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}. \quad (5.52)$$

Fluide compresibile ușoare

Procedând similar ca în subcapitolul 3.2, unde se tratează fluidele compresibile aflate în stare de repaus, se calculează $\int (dp/\rho)$. Se notează cu p și ρ , presiunea respectiv densitatea într-un punct arbitrar situat pe linia de curent ce trece prin punctele 1 și 2.

Mișcare izotermă. Deoarece $p/\rho = p_1/\rho_1$, rezultă $dp = (p_1/\rho_1) d\rho$ și deci $\int (dp/\rho) = (p_1/\rho_1) \ln \rho + const = p/\rho \ln \rho + const$. Relația (5.49) devine

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \ln \rho = const. \quad (5.53)$$

Rezultă

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \rho_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \ln \rho_2 \quad (5.54)$$

și deoarece $\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2}$ se deduce,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2^2}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^2}{2}. \quad (5.55)$$

Mișcarea adiabatică. Deoarece $(p/\rho^k) = (p_1/\rho_1^k)$, rezultă $dp = k(p_1/\rho_1^k) \rho^{k-1} d\rho$ și se calculează

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\rho} &= \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1^k} \right) \rho^{k-1} + const = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) \rho^{k-1} + const = \\ &= \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + const \end{aligned} \quad (5.56)$$

sau

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{k-1} + const = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} + const, \quad (5.57)$$

unde k este exponentul adiabatic.

Relația (5.49) devine

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = const \quad \text{sau} \quad \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = const. \quad (5.58)$$

Se obține relația Bernoulli pentru fluide în mișcare adiabatică

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (5.59)$$

Utilizând a doua formă a relației (5.58) se poate deduce și o altă expresie,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad (5.60)$$

relație cunoscută sub numele de relația lui Saint-Venant.

Mișcarea semipermanentă în lungul unei traiectorii

Se consideră mișcarea semipermanentă a unui lichid. Se reamintește că în acest caz liniile de curent și traiectoriile coincid. Ținând seama că pentru mișcarea semipermanentă viteza \vec{V} este paralelă cu $d\vec{r} = d\vec{s}$, se integrează relația (5.42) de-a lungul unei linii de curent, între un punct de referință caracterizat de abscisa curbilinie s_0 și un punct oarecare de abscisă s . Se obține, pentru un fluid incompresibil, relația

$$\int_{s_0}^s \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t), \quad (5.61)$$

unde $C(t)$ depinde numai de timp, fiind constantă pe linia de curent considerată. Relația lui Bernoulli pentru mișcările semipermanente ale lichidelor se obține scriind relația (5.61) între două puncte 1 și 2 ale liniei de curent,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (5.62)$$

sau

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds. \quad (5.63)$$

Această relație se aplică, de exemplu, în cazul mișcării de oscilație a apei într-un tub U .

5.3.4. Reprezentarea grafică și interpretarea energetică a relației lui Bernoulli

Fie un plan de referință orizontal ales arbitrar $O-O$ și o linie de curent $C-C$ oarecare din mediul fluid aflat în mișcare (fig. 5.7). Punctele M_1, M_2, M_3 de pe această linie de curent au față de planul $O-O$ cotele z_1, z_2, z_3 , iar particula care trece prin aceste puncte este caracterizată de parametrii hidrodinamici viteză și presiune, (V_1, p_1) , (V_2, p_2) , (V_3, p_3) .

Se aplică pentru aceste puncte relația Bernoulli pentru un fluid greu incompresibil (5.51)

$$H = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3. \quad (5.64)$$

Sarcina hidrodinamică H reprezintă energia unei unități de greutate de fluid. În mod obișnuit, presiunile p_1 și p_2 din relația lui Bernoulli (5.49) sunt cele absolute. Dar această relație are aceeași formă și dacă p_1 și p_2 sunt presiunile relative, ceea ce revine la a scădea termenul p_{at}/γ din cei doi membri ai egalității (5.49). În cele ce urmează pentru exemplul ilustrat prin relația (5.64), se consideră presiuni relative.

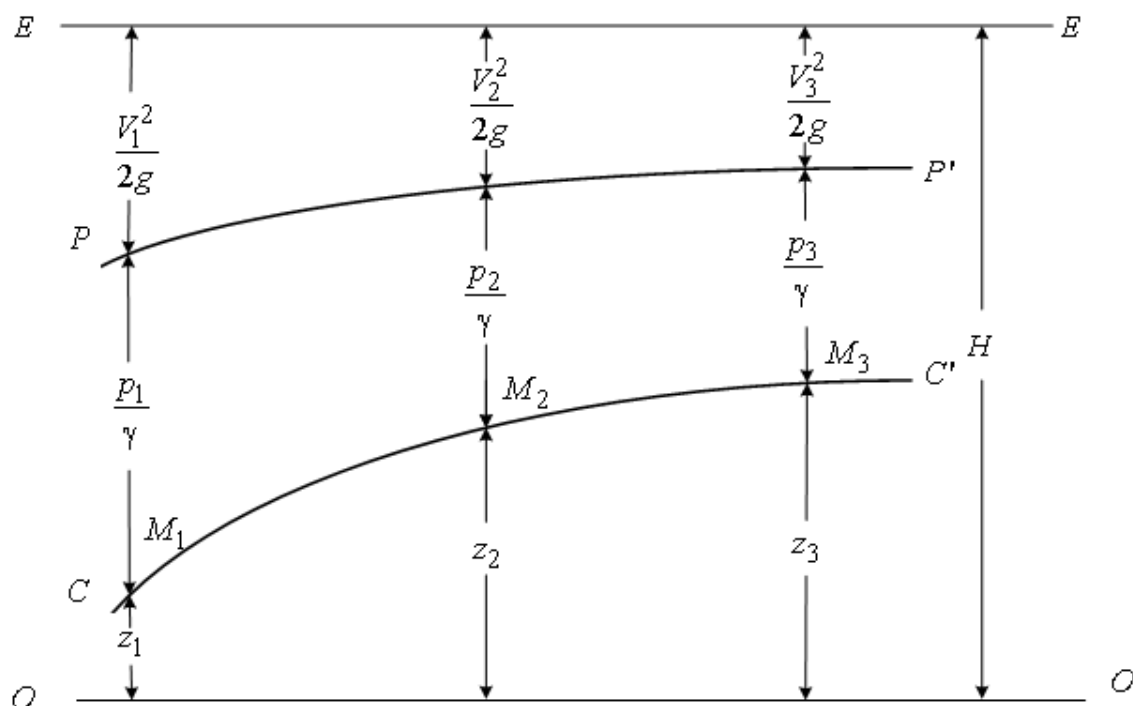


Fig. 5.7. Interpretarea geometrică a relației Bernoulli.

Se observă că, indiferent de poziția punctelor situate pe linia de curent, suma celor trei termeni $V^2/2g$, p/γ și z este aceeași. Acești termeni au dimensiunile unei lungimi (se măsoară în m), ceea ce permite o reprezentare grafică (fig. 5.6), sau dimensiuni de energie pe unitatea de greutate, ceea ce permite o interpretare energetică. Termenul $V^2/2$ reprezintă energia cinetică unitară (pe unitatea de greutate) a particulei, termenul p/γ reprezintă energia potențială unitară de presiune și termenul z reprezintă energia potențială unitară de poziție.

Locul geometric al tuturor punctelor aflate la extremitatea segmentului $z + p/\gamma$, linia PP' , poartă denumirea de *linie piezometrică*, iar linia EE' care este în cazul fluidului nevâscos orizontală, poartă denumirea de *linie energetică* și reprezintă grafic valoarea constantei H . Constanta H , denumită sarcină hidrodinamică, variază de la o linie de curent la alta.

Înmulțind relația lui Bernoulli cu greutatea particulei care se deplasează pe linia de curent $mg = \rho V g$, se obține relația

$$m \frac{V^2}{2} + V p + mgz = \text{const} , \quad (5.65)$$

în care $mV^2/2$ reprezintă energia cinetică, Vp energia potențială de presiune și mgz energia potențială de poziție a particulei.

În mișcarea permanentă a unui fluid nevâscos la care forțele masice derivă dintr-un potențial, suma energiei cinetice, energiei potențiale de poziție și a energiei potențiale de presiune rămâne constantă pentru toate punctele situate pe aceeași linie de curent.

În cazul mișcării semipermanente interpretarea energetică a relației (5.63) este: energia în punctul 1 al liniei de curent este egală cu energia în punctul 2 plus lucrul mecanic necesar pentru învingerea forțelor de inerție pentru accelerarea mișcării de la punctul 1 la punctul 2.

5.4. Aplicații ale relației lui Bernoulli

5.4.1. Tubul Pitot

Se consideră un fluid în mișcare permanentă și uniformă și un corp cilindric. Liniile de curent înconjoară corpul solid cu excepția uneia, care se ramifică la atingerea obstacolului, conturându-l (fig. 5.8). Acest punct notat cu 2 se numește *bord de atac* și este un *punct de stagnare*, deoarece viteza este nulă. Cele două linii de curent care conturează corpul se reunesc în punctul 3, numit *bord de fugă*, care este de asemenea un punct de stagnare.

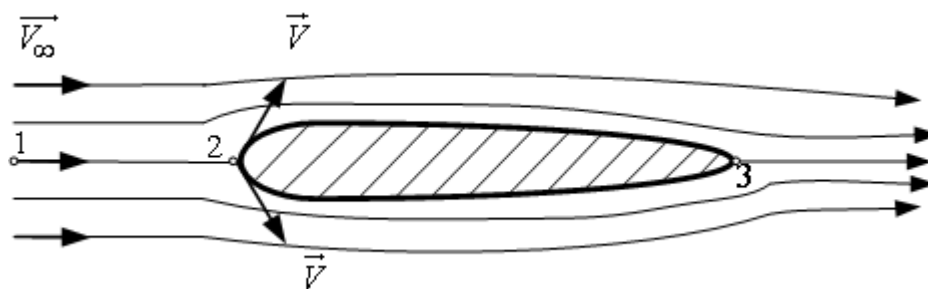


Fig. 5.8. Punct de stagnare.

Se consideră un punct 1 situat în amonte de corp la distanță suficient de mare pentru ca viteza, notată \vec{V}_∞ să nu fie perturbată de prezența corpului.

Un tub Pitot (fig. 5.9) este un tub îndoit la 90° , având un orificiu frontal cu ajutorul căruia se măsoară presiunea de stagnare (presiunea totală). Se introduce ramura amonte a tubului paralel cu direcția de curgere, într-un fluid cu suprafață liberă. Se scrie relația lui Bernoulli între punctul 1 și punctul de stagnare 2, situate pe aceeași linie de curent,

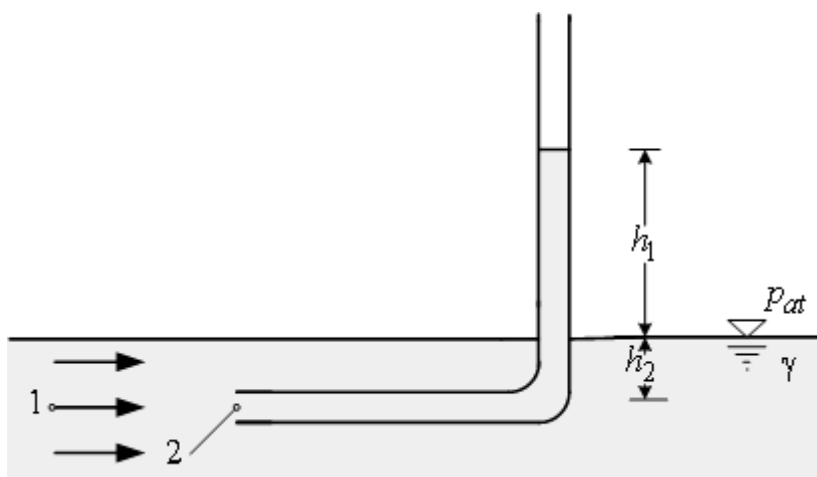


Fig. 5.9. Tubul Pitot.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 . \quad (5.66)$$

În punctul de stagnare 2, viteza este nulă și presiunea măsurată este presiunea totală, egală cu suma dintre presiunea statică și presiunea dinamică,

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} . \quad (5.67)$$

Dacă se exprimă presiunea în înălțime coloană de lichid

$$p_1 = \gamma h_2 \quad , \quad p_2 = \gamma(h_1 + h_2) , \quad (5.68)$$

relația (5.60) devine

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{\gamma(h_1 + h_2) - \gamma h_2}{\gamma} \quad (5.69)$$

și rezultă

$$V_1 = \sqrt{2gh_1} \quad . \quad (5.70)$$

Așadar, un dispozitiv extrem de simplu, un simplu tub îndoit, poate fi utilizat pentru măsurarea vitezei.

5.4.2. Măsurarea presiunii statice

Se consideră o curgere uniformă și permanentă definită prin vectorul viteză \vec{V} , paralel cu un perete plan. În peretele solid, se practică un orificiu fin, fără asperități sau bavuri, perpendicular pe direcția de curgere. Fluidul stagnează în orificiu, conservându-și presiunea avută în câmpul curgerii. Măsurând presiunea fluidului din orificiu, cu ajutorul unui manometru, se determină *presiunea statică* a fluidului (fig. 5.10).

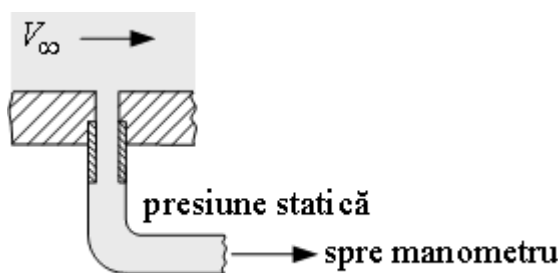


Fig. 5.10. Priză de presiune statică într-un perete plan care limitează o curgere uniformă.

Dacă peretele prezintă denivelări, liniile de curent nu mai sunt paralele cu peretele și se recomandă utilizarea unei sonde de presiune statică (sondă Prandtl) plasată în câmpul curgerii. Dispozitivul este format dintr-un tub cilindric îndoit la 90° , capătul amonte având o formă semisferică (fig. 5.11). Diametrul sondei d este de obicei 10 mm, putând fi însă și de dimensiuni mai mici.

Prizele de presiune statică sunt alcătuite din orificii sau fante receptoare, având dimensiunea de cel mult $0,1 d$ și sunt plasate pe prima parte a tubului, într-o secțiune transversală. În cazul măsurării unei viteze subsonice, distanța prizelor față de partea frontală este $l_1 = 3 d \div 8 d$, iar

față de tija de susținere $l_2 = 8d \div 20d$. De regulă există $4 \div 8$ orificii receptoare.

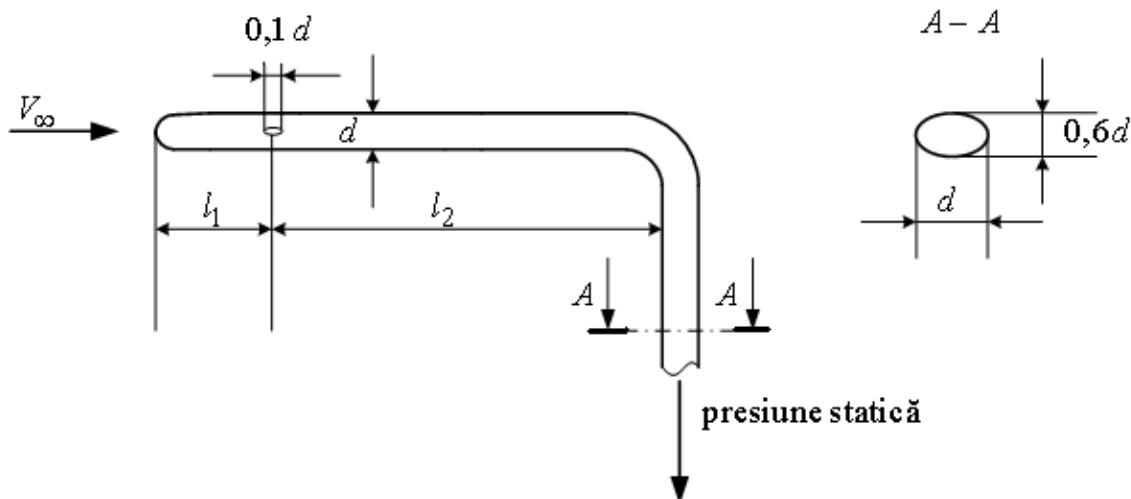


Fig. 5.11. Sondă de presiune statică.

Sonda se plasează paralel cu viteza curenului neperturbat \vec{V}_∞ . Se admit unghiuri de înclinare față de direcția curenului de maxim $\pm 10\%$, deoarece experiența a demonstrat că înclinarea sondei cu câteva grade nu modifică sensibil valoarea presiunii statice citite.

5.4.3. Sonda Pitot-Prandtl

Dispozitivul este compus din două sonde, una de presiune totală și una de presiune statică. În partea frontală, sonda Pitot-Prandtl conține o priză de presiune totală ce măsoară presiunea de stagnare. Pe lateral există câteva orificii ce măsoară presiunea statică. Pentru ca aparatul să efectueze măsurători cu o precizie acceptabilă trebuie îndeplinite anumite condiții:

1) axa tubului să fie paralelă cu direcția vitezei (se admit abateri de la direcția de curgere de cel mult 15%);

2) diametrul sondei să fie cel mult 10% din diametrul conductei, pentru ca aparatul să nu perturbe semnificativ câmpul vitezelor.

În figura 5.12 este prezentată o sondă Pitot Prandtl pentru curgeri subsonice.

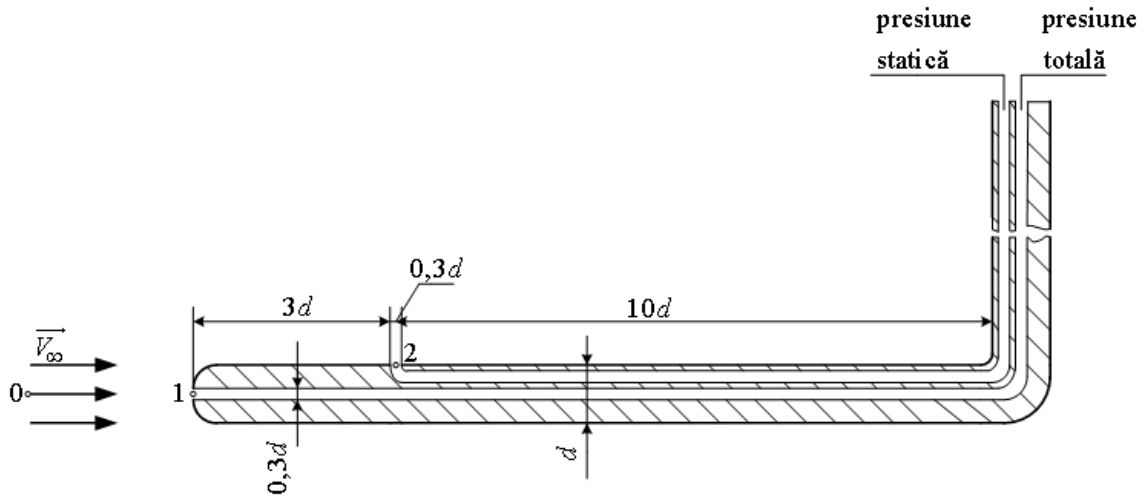


Fig. 5.12. Sonda Pitot-Prandtl pentru curgeri subsonice.

Se presupune un curent uniform a cărei viteză urmează a fi măsurată. Introducerea sondei în curent perturbă mișcarea, astfel încât în jurul sondei mișcarea nu este uniformă. Se consideră trei puncte: un punct din zona amonte a curgerii neperturbate de sondă notat cu 0, de viteză V_∞ și presiune p_∞ , punctul de stagnare 1 de viteză $V_1 = 0$ și presiune totală p_1 și punctul 2 corespunzător prizei de presiune statică.

Se scriu relațiile lui Bernoulli pentru un fluid incompresibil

$$\frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \text{ și } \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} . \quad (5.71)$$

Punctul 1 fiind punct de stagnare , $V_1 = 0$ și rezultă

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_\infty)}{\rho}} , \quad (5.72)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} . \quad (5.73)$$

Deoarece viteza V_2 este diferită de viteza curentului neperturbat V_∞ , se introduce coeficientul $\varepsilon = V_\infty / V_2$, unde $\varepsilon \in [0,9875 \div 1,0125]$, numit coeficientul de etalonare Pitot - Prandtl. Rezultă

$$V_{\infty} = \varepsilon \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}, \quad (5.74)$$

unde diferența de presiune $\Delta p = p_1 - p_2$ se măsoară cu un manometru diferențial. Dacă se utilizează un manometru diferențial cu lichid având densitatea ρ_m , mai mare decât densitatea lichidului în mișcare ρ , valoarea vitezei măsurate depinde de denivelarea înregistrată Δh_m , conform relației,

$$V_{\infty} = \varepsilon \sqrt{2g \frac{\rho_m}{\rho} \Delta h_m}. \quad (5.75)$$

Formula este recomandabilă pentru determinarea vitezei fluidelor incompresibile și a fluidelor compresibile, care se deplasează cu viteze mici ($Ma < 0,4$), eroarea înregistrată în acest ultim caz fiind sub 2%.

Pentru mișcarea subsonică, adiabatică a unui gaz, utilizând relația lui Saint-Venant (5.60) pentru punctele 1 și 2 se deduce

$$\frac{V_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \quad (5.76)$$

și rezultă

$$V_{\infty} = \varepsilon V_2 = \varepsilon \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (5.77)$$

Dacă, fluidul compresibil a cărei viteză se măsoară poate fi considerat un gaz perfect, conform legii lui Clapeyron (1.8), $p_1 / \rho_1 = RT$, (R - constanta gazului, T - temperatura) și relația 5.77 devine,

$$V_{\infty} = \varepsilon V_2 = \varepsilon \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (5.78)$$

În domeniu transonic $Ma \approx 1$ și supersonic $Ma > 1$, forma tubului Pitot Prandtl se modifică, iar relațiile de calcul ale vitezei sunt mai complicate.

Aplicația 5.1.

Fie două rezervoare plasate la înălțimea L față de sol, umplute cu apă până la nivelul z . La baza rezervoarelor se află un orificiu de diametru D . Din primul rezervor, apa este evacuată liber în atmosferă, iar din cel de al doilea prin intermediul unei conducte verticale de lungime L (fig. 5.13, a și b). Să se stabilească care din cele două sisteme permite evacuarea unui debit teoretic mai mare și care sunt valorile vitezei apei în punctul 1, respectiv 2.

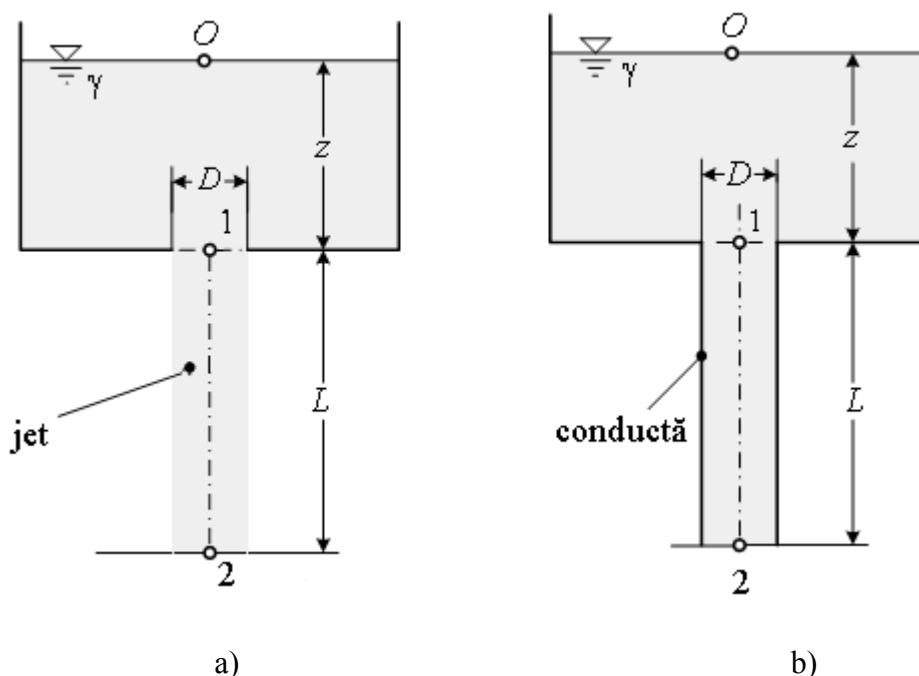


Fig. 5.13. Evacuarea rezervorului

Soluție

Rezolvarea aplicațiilor ce utilizează relația lui Bernoulli necesită alegerea judicioasă a liniei de curent. În cazul analizat aici, se poate considera că există o linie de curent ce trece dintr-un punct 0 situat pe suprafața liberă, punctul 1 din zona orificiului și punctul 2, situat la capătul inferior al jetului, respectiv al conductei. Punctul 0 are viteza practic nulă, dacă suprafața rezervorului este suficient de mare în raport cu aria orificiului.

Se scrie relația lui Bernoulli între punctele 0 și 2,

$$\frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h_0 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 .$$

Conform figurii 5.14 atât în cazul a) cât și în b) sunt valabile relațiile, $h_0 = z + L$, $h_2 = 0$, $V_0 = 0$. Deoarece jetul se evacuează în atmosferă $p_0 = p_2 = p_{at}$. Se obține

$$0 + \frac{p_{at}}{\gamma} + (z + L) = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_{at}}{\gamma} + 0 ,$$

și rezultă $V_2 = \sqrt{2g(z + L)}$.

a) Debitul este evacuat direct prin orificiul de fund. Din relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1

$$z + L = \frac{V_1^2}{2g} + L ,$$

rezultă $V_1 = \sqrt{2gz}$, debitul teoretic evacuat fiind

$$Q_a = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gz} .$$

b) Debitul este evacuat prin conductă.

Presiunea în punctul 1 este diferită de presiunea în punctul 2, însă conform ecuației de continuitate vitezele sunt egale,

$$V_1 = V_2 = \sqrt{2g(z + L)}$$

și prin urmare debitul teoretic evacuat este

$$Q_b = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g(z + L)} .$$

Se constată că pentru un fluid considerat nevâscos debitul evacuat este mai mare dacă se atașează o conductă la orificiul de fund al rezervorului.

Aplicația 5.2

Să se determine, în cazul prezentat anterior în figura 5.13, care este lungimea maximă L a conductei de evacuare, pentru a evita fenomenul de cavitație, dacă nivelul în rezervor este $z = 5\text{ m}$. Se consideră presiunea atmosferică $p_{at} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Care este valoarea debitelor evacuate dacă diametrul conductei este de 20cm? Se vor analiza situațiile:

a) temperatura fluidului este 20°C ;

b) temperatura fluidului este 70°C .

Presiunea de vaporizare a apei p_v este $p_{v_20^\circ\text{C}} = 2\,340 \text{ N/m}^2$ la temperatura de 20°C , respectiv $p_{v_70^\circ\text{C}} = 31\,160 \text{ N/m}^2$ la temperatura de 70°C , iar greutatea specifică a apei este $\gamma_{20^\circ\text{C}} = 9\,790 \text{ N/m}^3$ la temperatura de 20°C , respectiv $\gamma_{70^\circ\text{C}} = 9\,590 \text{ N/m}^3$ la temperatura de 70°C .

Soluție

Relația lui Bernoulli între punctele 1 și 2 este

$$\frac{p_1}{\gamma} + L = \frac{p_2}{\gamma} + 0$$

Se deduce

$$L = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{p_2 - p_v}{\gamma}.$$

Apa se evacuează în atmosferă, așadar p_2 reprezintă presiunea atmosferică.

În cazul a), lungimea conductei este

$$L_a = \frac{p_{at} - p_{v_20^\circ\text{C}}}{\gamma_{20^\circ\text{C}}} = \frac{101\,300 - 2\,340}{9\,790} = 10,11 \text{ m la } 20^\circ\text{C}.$$

În cazul b), lungimea conductei este

$$L_b = \frac{p_{at} - p_{v_{70^\circ C}}}{\gamma_{70^\circ C}} = \frac{101\,300 - 31\,160}{9\,590} = 7,31 \text{ m la } 70^\circ \text{C}.$$

Debitele evacuate sunt în cele două cazuri,

$$Q_a = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g(z + L_a)} = \frac{\pi}{4} (0,2)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (5 + 10,11)} = 0,541 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_b = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g(z + L_b)} = \frac{\pi}{4} (0,2)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (5 + 7,31)} = 0,488 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Aplicația 5.3

Fie o conductă sifon care se utilizează pentru evacuarea apei dintr-un rezervor. Dacă se consideră (fig. 5.14) diametrul conductei $D = 6 \text{ cm}$, și supraînălțarea maximă deasupra suprafeței libere din rezervor $h = 1 \text{ m}$, care este debitul maxim ce se poate evacua fără a se produce fenomenul de cavitație? Se consideră presiunea atmosferică $p_{at} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, presiunea de vaporizare a apei la 20°C , $p_{v_{20^\circ C}} = 2\,340 \text{ N/m}^2$ și greutatea specifică $\gamma = 9\,790 \text{ N/m}^3$.

Soluție

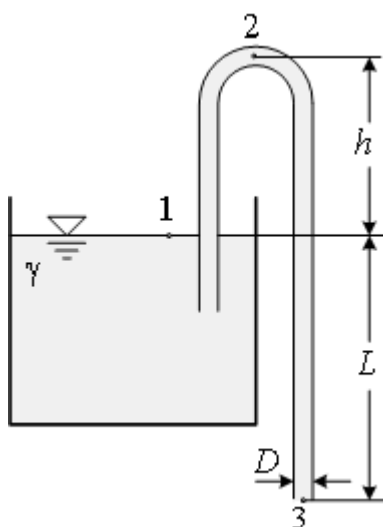


Fig. 5.14. Conducta sifon.

Considerând relația lui Bernoulli se constată că viteza la ieșirea din conductă depinde de diferența de nivel L dintre nivelul suprafeței libere a rezervorului și punctul de evacuare în atmosferă. Viteza în punctul de înălțime maximă, unde există pericolul apariției fenomenului de cavitație, este egală cu viteza la ieșirea din conductă, $V_2 = V_3$. Presiunea la evacuare este cea atmosferică $p_3 = p_{at}$.

Relația Bernoulli între punctele 2 și 3 se scrie

$$\frac{p_2}{\gamma} + (h + L) = \frac{p_3}{\gamma} .$$

Se deduce lungimea conductei la care există pericolul apariției fenomenului de cavitație

$$L = \frac{p_3 - p_2}{\gamma} - h = \frac{101\,300 - 2\,340}{9\,790} - 1 = 9,108 \text{ m} .$$

Din relația Bernoulli, scrisă pentru punctele 1 și 3, rezultă

$$V_3 = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 9,108} = 13,367 \text{ m/s} .$$

Prin urmare, debitul maxim este

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_3 = \frac{\pi \cdot 0,06^2}{4} \cdot 13,367 = 0,0377 \text{ m}^3/\text{s} .$$

În faza de proiectare a unei asemenea instalații, se recomandă alegerea unei lungimi a conductei L , astfel încât să se respecte condiția impusă de evitarea apariției fenomenului de cavitație.

Capitolul 6

DINAMICA FLUIDELOR VÂSCOASE ÎN REGIM LAMINAR

6.1. Clasificarea mișcărilor fluidelor vâskoase. Experiența lui Reynolds

Curgerile reale sunt deosebit de complexe și în consecință dificil de modelat teoretic. Ipoteza fluidului ideal, lipsit de viscozitate, a dus la rezolvarea satisfăcătoare a unui număr limitat de probleme tehnice, în marea majoritate a cazurilor dovedindu-se a fi mult prea restrictivă. Practica a arătat că un număr mare de fenomene nu pot fi explicate și studiate fără să se țină seama de proprietatea de viscozitate a fluidelor.

O. Reynolds a dovedit existența a două regimuri diferite de mișcare a fluidelor vâskoase: regimul laminar și regimul turbulent. Cu ajutorul unui experiment simplu a demonstrat deosebiri calitative dintre cele două regimuri și a pus în evidență fenomenul de tranziție dintre ele.

Instalația utilizată pentru experiment este constituită dintr-un rezervor cu apă notat R , căruia i se atașează o conductă transparentă S așezată orizontal, prevăzută cu un robinet A . În partea superioară există un recipient N umplut cu lichid colorat ce ajunge în conducta transparentă prin intermediul unui tub subțire T . Rezervorul este alimentat permanent și este de nivel constant (fig. 6.1).

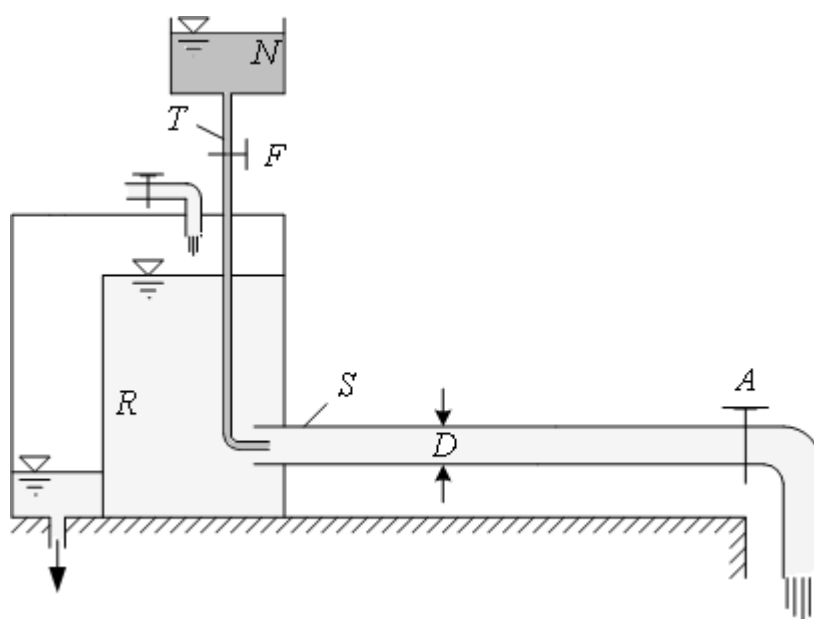


Fig. 6.1. Experiența lui Reynolds.

Se deschide ușor robinetul A , astfel încât fluidul de lucru să curgă încet prin conducta S . Prin manevrarea robinetului F se eliberează în conductă lichidul colorat. Dacă viteza fluidului este mică, se observă un fir colorat, rectiliniu, paralel cu axa conductei (fig. 6.2, a). Observația conduce la presupunerea că straturile de lichid alunecă unele peste altele, fără a se amesteca. Situația corespunde regimului *laminar* de curgere.

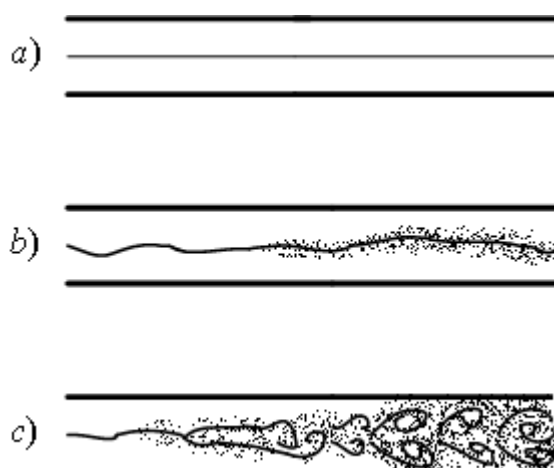


Fig. 6.2. Regimurile de mișcare.

În continuare, se mărește debitul prin conductă, firul colorat începe să oscileze, devine sinuos, de secțiune crescătoare (fig. 6.2, b). Comportamentul denotă apariția de pulsații de mică intensitate ale vitezei în timp. Regimul de curgere este de *tranziție*.

Dacă se acționează pentru creșterea vitezei fluidului de lucru, firul colorat se disipează rapid, apar vârtejuri și mișcări rotaționale (fig. 6.2, c). Curgerea se desfășoară în regim *turbulent*.

Pentru definirea regimurilor de curgere, O. Reynolds a propus o mărime adimensională

$$Re = \frac{VD}{\nu}, \quad (6.1)$$

unde D este diametrul conductei, V - viteza medie și ν - viscozitatea cinematică a lichidului. În onoarea savantului englez, mărimea Re a primit denumirea de *numărul Reynolds*.

S-a constatat că pentru o conductă circulară există un regim laminar de curgere, dacă $Re < 2\,320$. La depășirea valorii de 4 000 a numărului Reynolds apare de regulă regimul turbulent. Aceste valori depind de forma conductei și condițiile experimentale, tranziția și turbulența putând fi întârziate dacă se iau măsuri speciale.

6.2. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâscoase în regim laminar

6.2.1. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâscoase în regim laminar sub forma Navier – Stokes

Se consideră ecuația constitutivă pentru fluide reale (2.97),

$$\vec{T} = \left(-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right) \vec{I} + 2\eta \vec{D} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
&+ 2\eta \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Pentru fluide newtoniene este valabilă ipoteza lui Stokes

$$\lambda = -\frac{2}{3}\eta. \quad (6.3)$$

Pentru a deduce ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în mișcarea laminară se studiază forma acestor ecuații pe direcția Ox . Proiecția ecuației Cauchy (2.55) pe această direcție, ținând seama de ecuația constitutivă (6.2) și de ipoteza lui Stokes (6.3) este

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= F_{mx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[-p - \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\
&+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (6.4)
\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\
&+ \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.5)
\end{aligned}$$

sau

$$\frac{du}{dt} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (6.6)$$

sau încă

$$\frac{du}{dt} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial x} . \quad (6.7)$$

S-a notat cu $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ operatorul laplacian și cu

$\theta = \text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ coeficientul de compresibilitate. Prin permutări circulare se obțin celelalte două ecuații Navier-Stokes, corespunzătoare direcțiilor Oy și Oz . Relațiile se scriu condensat sub forma vectorială

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad } \theta . \quad (6.8)$$

Pentru fluide vâscoase incompresibile $\theta = 0$ și această expresie devine

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} . \quad (6.9)$$

Interpretarea termenilor care intervin în relațiile Navier- Stokes este prezentată în relația

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{componen-
ta locală
a forțelor
de inerție
pe unita-
tea de masă}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{componenta convectivă
a forțelor de inerție
pe unitatea de masă}} = \underbrace{F_{mx}}_{\text{forța ex-
terioară,
masică
pe unita-
tea de
masă}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{forța su-
perficia-
lă de pre-
siune, pe
unitatea
de masă}} + \underbrace{\nu \Delta u}_{\text{forța su-
perficia-
lă de vis-
cozitate-
pe uni-
tatea de
masă}} + \underbrace{\frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x}}_{\text{forța superficia-
lă de viscozitate
datorită compre-
sibilității pe uni-
tatea de masă}} . \quad (6.10)$$

Sistemul de ecuații Navier-Stokes se completează cu ecuația continuității și ecuația de stare pentru un fluid barotrop și rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} , \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} , \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} , \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 , \\ \rho = \rho(p) . \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Sistemul de ecuații este neliniar, de cinci ecuații cu derivate parțiale, de ordinul doi. Variabilele independente sunt x, y, z și t , iar variabilele dependente (funcțiile necunoscute) sunt $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$. Componentele forțelor masice exterioare pe unitatea de masă F_{mx}, F_{my}, F_{mz} și viscozitatea ν sunt cunoscute. Integrarea exactă a acestui sistem de ecuații este posibilă numai în unele cazuri particulare (de exemplu curgerea între doi pereți plani paraleli, curgerea printr-o conductă eliptică sau circulară). Modalitatea curentă de rezolvare a sistemului de ecuații este prin soluții numerice, cu ajutorul calculatoarelor

În cazul fluidului incompresibil rezultă un sistem de ecuații mai simplu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u , \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v , \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w , \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \end{array} \right. \quad (6.12)$$

6.2.2. Condiții inițiale și condiții la limită necesare integrării ecuațiilor

Soluția sistemului (6.11), respectiv (6.12), trebuie să satisfacă condițiile inițiale și condițiile la limită impuse de cazul concret de mișcare laminară studiat.

Condițiile inițiale sunt condițiile care se impun câmpului vitezelor și câmpului presiunii la un moment dat t_0 , considerat moment inițial,

$$\begin{cases} u(x, y, z, t_0) = u_0(x, y, z), \\ v(x, y, z, t_0) = v_0(x, y, z), \\ w(x, y, z, t_0) = w_0(x, y, z), \\ p(x, y, z, t_0) = p_0(x, y, z), \end{cases} \quad (6.13)$$

unde u_0, v_0, w_0, p_0 sunt funcții cunoscute. În cazul fluidelor compresibile condiția $\rho(x, y, z, t_0) = \rho_0$ rezultă din ecuația complementară $\rho = \rho(p)$. Condițiile inițiale sunt necesare numai în studiul mișcării nepermanente.

Condițiile la limită sunt condiții care trebuie verificate pe frontierele curentului de fluid de către viteze (condiții la limită cinematice) și de către presiune (condiții la limită dinamice).

Condițiile la limită cinematice. Se consideră, într-un plan xOy , un corp solid de contur (C) fix, în jurul căruia se deplasează în regim laminar cu viteza la infinit \vec{V}_∞ , un fluid vâscos, compresibil, barotrop (fig. 6.3). La distanță mare de corp, curgerea nu este perturbată de prezența corpului, așadar *condiția la limită la infinit* este dată de relația

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \vec{V}(P, t) = \vec{V}_\infty. \quad (6.14)$$

Pe suprafața corpului, datorită proprietății fluidelor vâscoase de a adera la solide este valabilă condiția de adeziune

$$V|_{(C)} = 0. \quad (6.15)$$

Se observă că, spre deosebire de cazul fluidelor ideale, conturul unui corp solid imersat într-un fluid în mișcare nu mai este linie de curent.

Condiția la limită cinematică pe pereți solizi, aflați la distanță de corp, respectă condiția de aderență, adică viteza fluidului în vecinătatea peretelui este egală cu viteza peretelui.

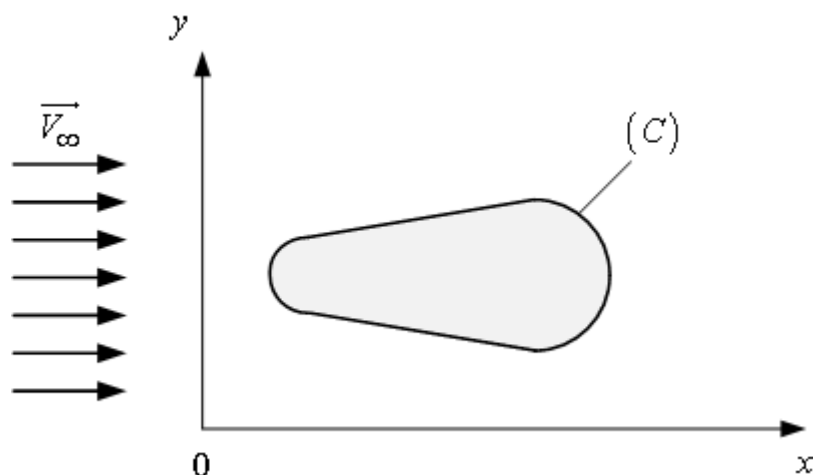


Fig. 6.3. Condiții la limita cinematică în cazul mișcării unui fluid vâscos în jurul unui corp solid.

Condițiile la limită dinamice sunt condițiile care se impun presiunii la infinit și presiunii care se exercită pe anumite frontiere ale fluidului în mișcare. Expresiile sunt analoage condițiilor la limită dinamice pentru fluide nevâskoase. La distanță mare de corpul solid, câmpul presiunilor nu este perturbat, fiind

$$\lim_{P \rightarrow \infty} p(P) = p_{\infty}. \quad (6.16)$$

Una dintre cele mai uzuale condiții la limită dinamice este condiția pe suprafața liberă S_0 a unui lichid,

$$p|_{S_0} = p_0. \quad (6.17)$$

Presiunea p_0 reprezintă presiunea la suprafața liberă (de obicei, cea atmosferică, $p_0 = p_{at}$). Această condiție este valabilă și pe suprafața unui jet de lichid în atmosferă.

6.3. Relația lui Bernoulli pentru fluide vâscoase în regim laminar

6.3.1. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâscoase în regim laminar sub formele Helmholtz și Gromeka-Lamb

Similar cazului fluidului nevâscos, dacă în primele trei ecuații ale sistemului (6.11), se grupează termenii sub o formă convenabilă și se obțin ecuațiile de mișcare laminară a fluidelor vâscoase sub forma Helmholtz ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} .
 \end{aligned}$$

compo-
nenta
locală
a for-
țelor de
inerție
pe uni-
tatea
de
masă

componen-
ta convec-
tivă a for-
țelor de i-
nerție dato-
rită varia-
ției energiei
cinetice, pe
unitatea
de masă

componenta convectivă
a forțelor de inerție da-
torită variației vârtejului,
pe unitatea de masă

forța
exte-
rioară
masică,
pe uni-
tatea
de
masă

forța
super-
ficială
de pre-
siune,
pe uni-
tatea
de
masă

forța su-
perficie-
lă de vis-
cozitate-
pe uni-
tatea de
masă

forța
super-
ficială
de vis-
cozitate
datorită
compre-
sibilită-
ții pe u-
nitatea
de masă

(6.18)

Forma vectorială a acestor ecuații este

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad} \theta .$$

(6.19)

Dacă forțele masice derivă dintr-un potențial și fluidul este barotrop se obțin ecuațiile de mișcare în regim laminar a fluidelor vâscoase sub forma Gromeka-Lamb,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (6.20)$$

sau sub formă vectorială

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = \nu \Delta \vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad} \theta. \quad (6.21)$$

Așa cum s-a mai precizat, expresia $\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m = \mathcal{B}$ este funcția lui Bernoulli. Termenii acestei expresii au dimensiunea de energie pe unitatea de masă și arată că energia totală a unei particule de fluid este formată din energia cinetică $\frac{V^2}{2}$, energia potențială de presiune $\int \frac{dp}{\rho}$ și energia potențială a forțelor masice U (toate energiile corespund unității de masă).

6.3.2. Relația lui Bernoulli în cazul mișcării fluidelor vâskoase în regim laminar

O integrală primă a ecuațiilor de mișcare se obține din ecuațiile Gromeka-Lamb. Se înmulțesc cele trei ecuații (6.18) cu deplasările elementare dx , dy , dz și se sumează. Se obține

$$\frac{\partial}{\partial t} (u dx + v dy + w dz) + d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -\delta l_v, \quad (6.22)$$

unde

$$-\delta l_v = v \left[\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz + \frac{1}{3} d\theta \right]. \quad (6.23)$$

reprezintă lucrul mecanic elementar al forțelor de viscozitate.

6.3.3. Forme particulare ale relației lui Bernoulli

În cazul **mișcărilor permanente** primul termen al relației (6.22) se anulează, fiind o derivată parțială în raport cu timpul, și relația devine

$$d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -\delta l_v. \quad (6.24)$$

Dacă integrarea se efectuează pe o linie de curent, pe o linie de vârtej sau între două puncte ale unei curbe oarecare, dar în cazul mișcării elicoidale a fluidului, determinantul se anulează și relația (6.24) ia forma

$$d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U_m \right) = -\delta l_v. \quad (6.25)$$

Relația lui Bernoulli rezultă din integrarea ecuației (6.25) în câmp gravitațional ($U_m = gz + const$) între două puncte alese conform ipotezelor admise și este o ecuație de bilanț de energie.

În cazul **fluidelor incompresibile grele** se scrie

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}}, \quad (6.26)$$

unde $h_{r_{1-2}} = \frac{1}{g} \int_{1,2} \delta l_v$ este pierderea de sarcină între punctele 1 și 2,

reprezentând un lucru mecanic rezistiv.

Relația (6.26) se aplică lichidelor sau uneori și gazelor, de exemplu în cazul coșurilor de fum foarte înalte la care energia de poziție nu poate fi neglijată.

În studiul **fluidelor incompresibile ușoare** forțele de greutate pot fi neglijate în raport cu cele de inerție și de presiune și rezultă

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + \int_{1,2} \delta l_v. \quad (6.27)$$

Pentru **fluide compresibile ușoare** relația (6.25) se scrie sub forma

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho}\right) = \delta l_v \quad (6.28)$$

Procedând similar cazului fluidului nevâscos, prezentat în subcapitolul 5.3.3., se deduc relațiile Bernoulli pentru fluide vâskoase compresibile.

Dacă mișcare este izotermică, integrând relația (6.28) între punctele 1 și 2 situate pe aceeași linie de curent se obține

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \rho_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \ln \rho_2 + \int_{1,2} \delta l_v \quad (6.29)$$

$$\text{sau } \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^2}{2} + \int_{1,2} \delta l_v. \quad (6.29')$$

Pentru mișcarea adiabatică, se deduce relația

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \int_{1,2} \delta l_v \quad (6.30)$$

sau

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{V_2^2}{2} + \int_{1,2} \delta l_v. \quad (6.30')$$

Relația Bernoulli pentru mișcarea politropă este

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \frac{V_2^2}{2} + \int_{1,2} \delta l_v, \quad (6.31)$$

unde n este coeficientul politropic.

Mișcarea semipermanentă în lungul unei traiectorii este mișcarea nepermanentă la care direcția vitezei locale este fixă. Relația lui Bernoulli în acest caz este asemănătoare cu ecuația Bernoulli în mișcare semipermanentă pentru fluide nevâscoase, dar se adaugă un termen suplimentar h_{r12} , reprezentând pierderea de sarcină în lungul traiectoriei, între punctele 1 și 2.

Interesează în mod deosebit forma relației lui Bernoulli în mișcare semipermanentă pentru fluide grele, incompresibile

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + h_{r1-2}. \quad (6.32)$$

6.3.4. Relația lui Bernoulli pentru un tub de curent

Relația lui Bernoulli este dificil de utilizat, deoarece implică identificarea punctelor (pe aceeași linie de curent, pe aceeași linie de vârtej etc.). Este mult mai indicat să se identifice o formă a relației Bernoulli valabilă pentru două puncte situate pe o linie de curent fictivă, unde fluidul ar avea viteze egale cu vitezele medii în secțiunile normale tubului de curent.

Se consideră un tub de curent și două secțiuni normale acestuia S_1 și S_2 , plasate în zone în care liniile de curent sunt drepte (fig. 6.4). Se presupune că se iau în considerare suficient de multe linii de curent, încât fiecare particulă fluidă care are centrul de masă în S_1 aparține unei linii de curent. Deoarece liniile de curent se conservă, aceleași linii de curent se vor găsi și în secțiunea S_2 .

Se notează \vec{W} , p , z viteza, presiunea și cota geometrică ale unei particule fluide, situate în secțiunea S , iar cu \vec{V} viteza medie în secțiunea S .

Conform relației lui Bernoulli, două particule de fluid plasate în secțiunile S_1 și S_2 , aparținând aceleași linii de curent au aceeași energie totală, în ipoteza fluidului ideal. Suma energiilor mecanice totale ale tuturor particulelor din secțiunea S_1 este egală cu suma energiilor mecanice totale ale particulelor din secțiunea S_2 . În cazul mișcării permanente a unui fluid greu incompresibil se poate scrie

$$\iint_{S_1} \left(\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) dm = \iint_{S_2} \left(\frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) dm, \quad (6.33)$$

unde $dm = \rho W dS \Delta t$. În porțiunile cu linii de curent drepte ale tubului de curent $p/\rho + gz = \text{const.}$

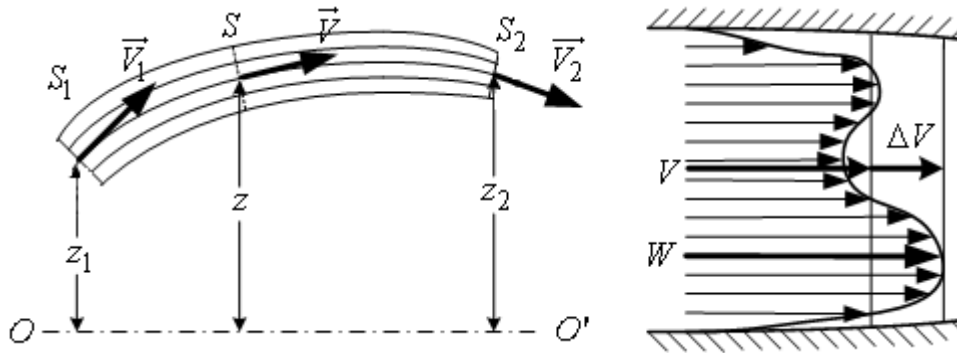


Fig. 6.4. Relația Bernoulli pentru un tub de curent.

Se consideră centrele de masă ale secțiunilor S_1 și S_2 , unde presiunile și cotele sunt p_1, z_1 și p_2, z_2 . Relația (6.33) se poate scrie, notând cu Q debitul tubului de curent,

$$\frac{1}{2} \iint_{S_1} W^3 dS_1 + \left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) Q = \frac{1}{2} \iint_{S_2} W^3 dS_2 + \left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) Q. \quad (6.34)$$

Viteza locală se poate scrie sub forma $W = V + \Delta V$, cu ΔV pozitiv sau negativ. Se calculează

$$\begin{aligned} \iint_S W^3 dS &= \iint_S (V + \Delta V)^3 dS = \\ &= \iint_S \left[V^3 + 3V^2 (\Delta V) + 3V (\Delta V)^2 + (\Delta V)^3 \right] dS = \iint_S V^3 dS + \iint_S 3V^2 (\Delta V) dS + \\ &+ 3V \iint_S (\Delta V)^2 dS + \iint_S (\Delta V)^3 dS = V^3 S + 3V \iint_S (\Delta V)^2 dS + \iint_S (\Delta V)^3 dS, \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\text{deoarece } \iint_S 3V^2 (\Delta V) dS = 3V^2 \iint_S (W - V) dS = 3V^2 \left(\iint_S W dS - VS \right) = 0.$$

Se notează

$$\alpha = \frac{1}{V^3 S} \iint_S W^3 dS = 1 + \frac{3}{S} \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 dS + \frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^3 dS \cong 1 + \frac{3}{S} \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 dS, \quad (6.36)$$

întrucât se poate considera $(\Delta V/V)^3 \ll 1$. Coeficientul α se numește *coeficientul lui Coriolis* și caracterizează influența distribuției neuniforme a vitezei în secțiunea tubului de curent asupra mărimii energiei cinetice a fluidului care trece prin secțiunea considerată. Pentru curgerea laminară într-o conductă circulară $\alpha = 2$, iar pentru curgerea turbulentă $\alpha \cong 1,05 \dots 1,15$.

Relația (6.35) devine

$$\iint_S W^3 dS = V^3 S + 3V^3 \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 dS = V^3 S \left[1 + \frac{3}{S} \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 dS \right] = \alpha V^2 Q. \quad (6.37)$$

Relația lui Bernoulli pentru un tub de curent se scrie sub forma

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 . \quad (6.38)$$

Relația (6.38) reprezintă relația lui Bernoulli generalizată pentru mișcarea permanentă a fluidelor incompresibile grele, nevâskoase, valabilă pentru un curent de fluid de secțiune finită, inclus într-un tub de curent.

În cazul fluidelor vâskoase trebuie considerate și pierderile de sarcină prin rezistențe hidraulice,

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}} , \quad (6.39)$$

unde V_1 și V_2 sunt vitezele medii ale fluidelor în secțiunile S_1 și S_2 normale tubului de curent.

Similar se poate deduce *coeficientul lui Boussinesq* notat cu β , care caracterizează influența distribuției neuniforme a vitezei în secțiunea normală tubului de curent asupra mărimii cantității de mișcare a masei de fluid care trece prin secțiunea considerată,

$$\beta = \frac{1}{V^2 S} \iint_S W^2 dS = 1 + \frac{1}{V^2 S} \iint_S (\Delta V)^2 dS = 1 + \frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 dS . \quad (6.40)$$

Pentru curgerea turbulentă $\beta \cong 1,01 - 1,05$.

Relația lui Bernoulli generalizată pentru mișcări semipermanente ale fluidelor grele incompresibile vâskoase este

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + h_{r_{1-2}} , \quad (6.41)$$

unde ds este elementul de arc al axei tubului de curent, $V = V(s, t)$ - viteza medie în secțiunea normală, p - presiunea pe axa tubului de curent și z - cota geometrică pe axa tubului de curent.

6.3.5. Reprezentarea grafică și interpretarea energetică a relației lui Bernoulli pentru fluide vâscoase

Fie un plan de referință orizontal ales arbitrar $O-O$ și o linie de curent $C-C'$ oarecare din mediul fluid aflat în mișcare. Fie punctele M_1 și M_2 de cote z_1 și z_2 (fig. 6.5).

Relația lui Bernoulli pentru un fluid greu incompresibil în mișcare laminară este

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}}. \quad (6.42)$$

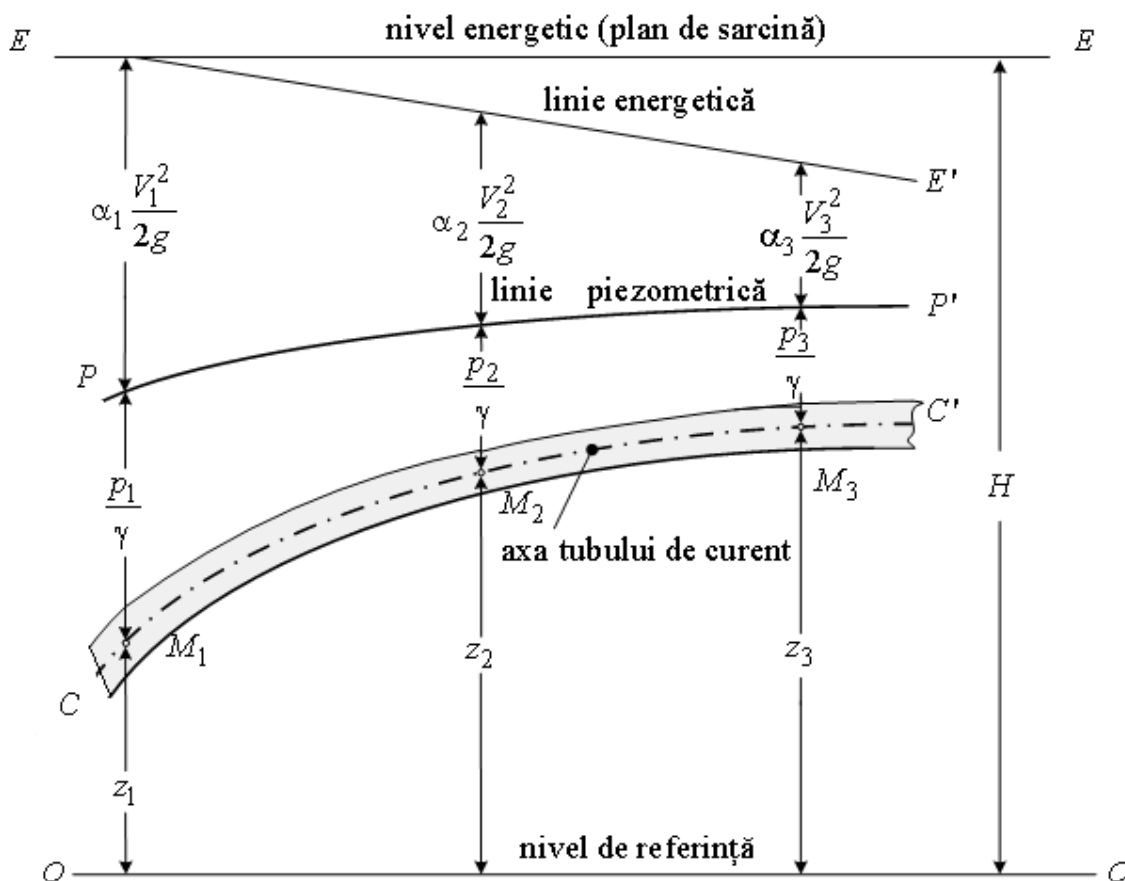


Fig. 6.5. Interpretarea geometrică a relației lui Bernoulli pentru un fluid vâscos.

Se observă că relația (6.42) pentru fluide incompresibile în mișcare laminară diferă de relația Bernoulli pentru fluide ideale prin apariția termenului suplimentar,

$$h_{r_{1-2}} = \frac{1}{g} \int_{1,2} \delta l_V = -\frac{1}{g} \int_{1,2} v \left[\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz + \frac{1}{3} d(\operatorname{div} \vec{V}) \right]. \quad (6.43)$$

Linia energetică pentru un fluid real nu este o dreaptă paralelă cu planul de referință, ci o curbă care coboară continuu, energia totală a particulei scăzând în sensul deplasării acesteia.

Relația lui Bernoulli reprezintă aplicarea principiului transformării și conservării energiei: energia în punctul 1 al liniei de curent este egală cu energia în punctul 2 al liniei de curent, la care se adaugă energia disipată datorită viscozității. Energia mecanică disipată de fluid în timpul curgerii se transformă în energie termică.

De regulă, interesează relația lui Bernoulli, scrisă între două puncte aflate pe aceeași linie de curent fictivă, unde vitezele sunt egale cu vitezele medii în secțiunile normale tubului de curent,

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}}. \quad (6.44)$$

În cazul mișcării semipermanente a unui fluid real în lungul unei traiectorii, în partea a doua a relației lui Bernoulli apare termenul $\frac{1}{g} \int \frac{\partial V}{\partial t} ds$, care reprezintă lucrul mecanic necesar învingerii forțelor de inerție datorită accelerării mișcării de la punctul 1 la punctul 2.

6.3.6. Aplicații ale relației lui Bernoulli pentru fluide vâskoase

Tubul Venturi

Tubul Venturi este un debitmetru, format dintr-un tub convergent-divergent intercalat pe conductă. Se compune dintr-un tronson cilindric de același diametru D_1 ca și conducta, un trunchi de con convergent de unghi total $20^\circ - 22^\circ$, un col cilindric de diametru D_2 și un trunchi de con divergent de unghi total $7^\circ - 15^\circ$ care face legătura cu tronsonul de conductă aval (fig. 6.6). Pe componentele cilindrice ale dispozitivului sunt prevăzute prize de presiune statică.

Considerându-se fluidul nevâscos, conform ecuației de continuitate $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ și relației lui Bernoulli se poate scrie

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right], \quad (6.45)$$

unde p_1, p_2 sunt presiunile relative, iar V_1, V_2 vitezele medii în secțiunile 1 și 2. Se notează $A_2 / A_1 = m$ și se calculează viteza fluidului

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma}}. \quad (6.46)$$

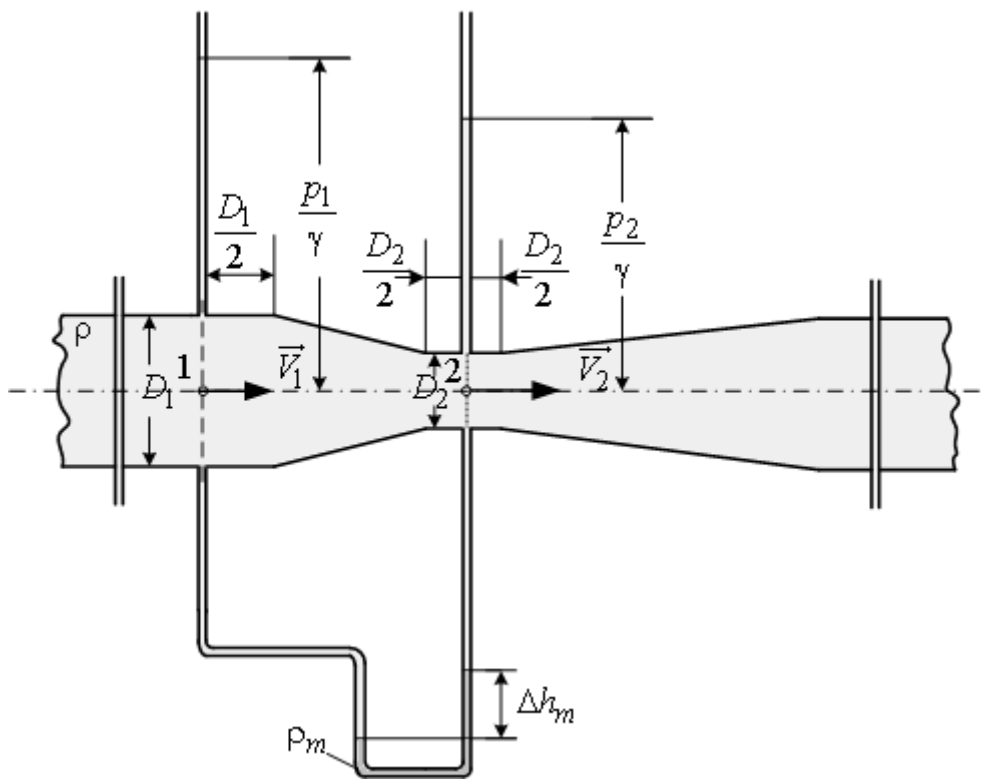


Fig. 6.6. Tubul Venturi.

În tehnică, pentru fluide reale (vâscoase) se aplică un coeficient de corecție și viteza fluidului se determină cu relația

$$V_2 = \varphi \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma}}. \quad (6.47)$$

Coeficientul de corecție a vitezei φ , ține seama de pierderile de sarcină din cazul real al fluidului vâscos (6.38) și are o valoare cuprinsă între $0,92 \div 0,99$. Debitul real se obține utilizând coeficientul de debit μ subunitar, a cărui valoare deține seama de pierderile de sarcină în aparat și valorile supraunitare ale coeficienților lui Coriolis și de contracția curentului în secțiunea colului de arie A_2 ,

$$Q = \mu A_2 \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma}} . \quad (6.48)$$

Dacă presiunile p_1 și p_2 sunt prea mari pentru a utiliza tuburi piezometrice se racordează la prizele de presiune un manometru diferențial, debitul măsurat fiind

$$Q = \mu A_2 \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \sqrt{2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) g \Delta h_m} , \quad (6.49)$$

unde Δh_m este denivelarea lichidului manometric de densitate ρ_m . Coeficientul de debit μ al tubului Venturi se determină experimental prin etalonare și se stabilește în funcție de numărul lui Reynolds al curgerii. De exemplu, pentru un tub construit conform standardelor în vigoare, o valoare $m = 0,2 \div 0,5$ și $Re > 200\,000$ se consideră $\mu = 0,985$.

Debitmetrul cu diafragmă

Datorită simplității constructive, debitmetrul cu diafragmă este cel mai răspândit aparat de măsură a debitului. Asemenea tubului Venturi face parte din categoria aparatelor bazate pe strangularea curentului de fluid.

Diafragma se montează între două tronsoane ale unei conducte de diametru D . Orificiul diafragmei trebuie să fie mai mare de 12,5 mm, iar $0,2 < d/D < 0,75$. Prizele de presiune se plasează în secțiunile S_1 și S_2 , conform figurei 6.7. Formula de calcul a debitului este (6.49), cu observația că, μ , coeficientul de debit este mai mic decât în cazul tubului Venturi, datorită pierderilor de sarcină mai mari.

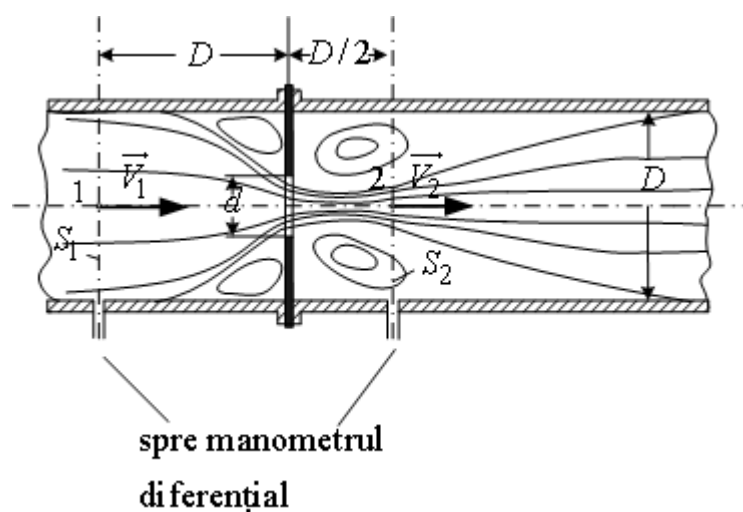


Fig. 6.7. Debitmetrul cu diafragmă.

6.4. Cazuri de integrare exactă a ecuațiilor Navier-Stokes

În sistemul Navier Stokes (6.11) sau (6.12) numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, însă integrarea este dificilă, ecuațiile fiind neliniare. Se apelează la metode aproximative de rezolvare, deoarece soluțiile exacte sunt posibile numai pentru mișcări relativ simple. În continuare, sunt prezentate câteva soluții exacte pentru sistemul de ecuații Navier Stokes.

6.4.1. Curgerea permanentă între două plăci plane paralele

Fie mișcarea unui lichid de densitate ρ și viscozitate ν între două plăci plane paralele, de suprafață foarte mare, situate la distanța h . Plăcile sunt mobile, cea inferioară deplasându-se cu viteza $-V_1$, respectiv cea superioară cu V_2 , în direcția axei Ox .

Se integrează sistemul de ecuații corespunzător unui fluid vâcos incompresibil în mișcare laminară (6.12) în ipotezele:

$$1) \text{ curgerea este permanentă } \left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \right);$$

2) curgerea este plană $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$;

3) curgerea se desfășoară în lungul axei Ox , deci $u = u(x, z)$, $w = 0$.

Ecuția continuității se reduce la $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, de unde rezultă $u = u(z)$.

Componentele forței masice exterioare pe unitatea de masă sunt $F_{mx} = 0$, $F_{my} = 0$ și $F_{mz} = -g$. Rezultă

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g. \quad (6.50)$$

Deoarece $u = u(z)$, din prima ecuație rezultă

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_1(z), \quad (6.51)$$

iar din ecuațiile a doua și a treia rezultă variația presiunii în planul $x = \text{const}$,

$$p = -\rho g z + f_2(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = f_2'(x). \quad (6.52)$$

În concluzie, $\partial p / \partial x = \text{const}$. Prin integrarea primei ecuații din sistemul (6.50) se obține expresia vitezei axiale

$$u(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2. \quad (6.53)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină impunând condițiile la limită corespunzătoare aderenței fluidului la plăci: pentru $z = 0$, $u = -V_1$, iar pentru $z = h$, $u = V_2$. Se deduce

$$C_1 = \frac{V_1 + V_2}{h} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h, \quad C_2 = -V_1 \text{ și relația (6.53) devine}$$

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z - h) + \frac{V_1 + V_2}{h} z - V_1. \quad (6.54)$$

Se analizează trei cazuri:

a) Mișcarea fluidului se datorește în exclusivitate deplasării plăcilor, presiunea fiind constantă în lungul axei Ox , $\partial p / \partial x = 0$.

Legea de repartitie a vitezelor este liniară,

$$u = \frac{V_1 + V_2}{h} z - V_1 . \quad (6.55)$$

Tensiunea tangențială este constantă în secțiune și are valoarea

$$\tau_{zx} = \eta \frac{du}{dz} = \eta \frac{V_1 + V_2}{h} . \quad (6.56)$$

Dacă placa inferioară este fixă, $V_1 = 0$, mișcarea obținută se numește *curgerea Couette* (fig.6.8), pentru care

$$u = \frac{V_2}{h} z \quad \text{și} \quad \tau_{zx} = \eta \frac{V_2}{h} . \quad (6.57)$$

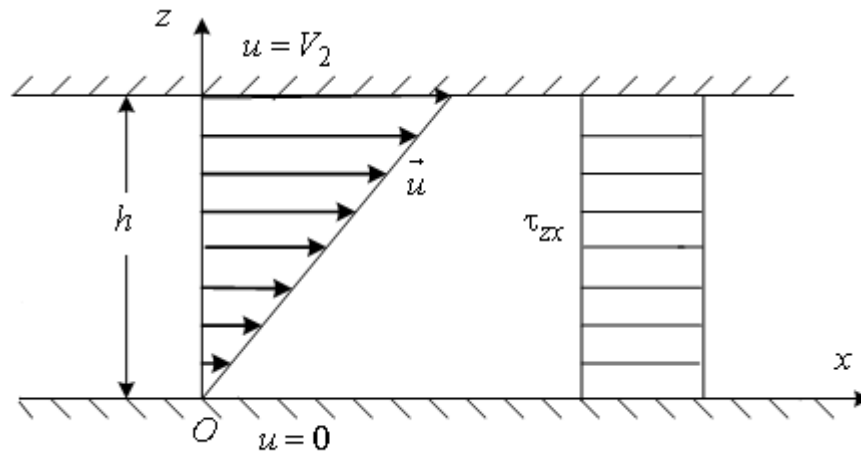


Fig. 6.8. Curgerea Couette.

Stratul de fluid superior acționează asupra stratului de fluid inferior în sensul accelerării acestuia, iar stratul inferior acționează asupra stratului superior în sensul frânării acestuia.

b) Mișcarea fluidului se datorește unui gradient de presiune negativ, $\partial p / \partial x = \text{const.} < 0$ în lungul axei Ox , ambele plăci fiind fixe. Expresia vitezei devine

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h). \quad (6.58)$$

Mișcarea este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *curgerea Poiseuille*. Se observă că viteza are o distribuție parabolică (fig. 6.8) cu viteza maximă la $z = h/2$ mijlocul distanței dintre plăci

$$u_{\max} = \frac{h^2}{8\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (6.59)$$

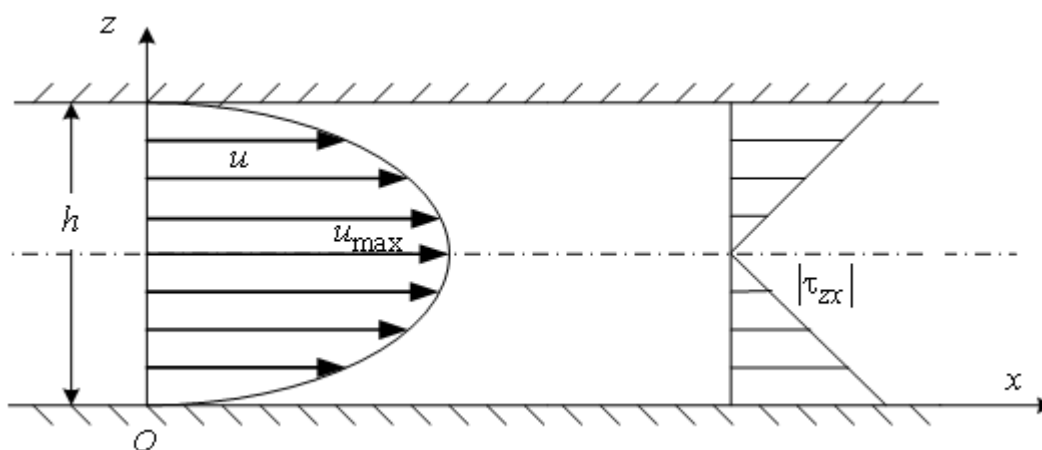


Fig. 6.9. Curgerea Poiseuille.

Se calculează debitul între plăci

$$Q = \int_0^h u \, dz = \frac{h^3}{12\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (6.60)$$

și viteza medie

$$u_{\text{med}} = \frac{Q}{h} = \frac{h^2}{12\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{2}{3} u_{\max}. \quad (6.61)$$

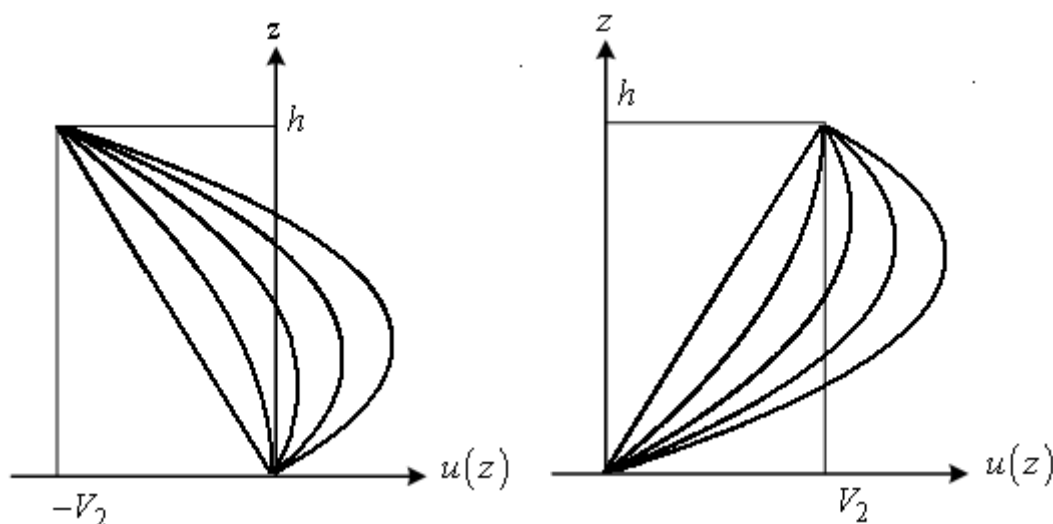
Pentru $z \in \left(0, \frac{h}{2}\right)$, $\frac{du}{dz} > 0$ și modulul tensiunii tangențiale este $|\tau_{zx}| = \eta \frac{du}{dz}$;
 pentru $z \in \left(\frac{h}{2}, h\right)$, $\frac{du}{dz} < 0$ și modulul tensiunii tangențiale este
 $|\tau_{zx}| = -\eta \frac{du}{dz}$. Rezultă modulul tensiunii tangențiale

$$|\tau_{zx}| = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) |2z - h|. \quad (6.62)$$

Se observă că la mijlocul distanței între plăci, tensiunea tangențială este nulă, iar pe plăci modulul acesteia este maxim, $|\tau_{zx}|_{\max} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) h$.

c) Mișcarea fluidului se datorește atât deplasării plăcilor, cât și scăderii presiunii în lungul axei Ox . Când placa superioară se deplasează, iar placa inferioară este fixă, mișcarea se numește *curgerea Couette-Poiseuille*. Înlocuind $V_1 = 0$ în expresia (6.54), se obține

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z - h) + \frac{V_2}{h} z. \quad (6.63)$$



a) Viteza V_2 este orientată în sensul negativ al axei Ox .

b) Viteza V_2 este orientată în sensul pozitiv al axei Ox .

Fig. 6.10. Mișcarea Couette-Poiseuille.

În figura 6.10. a) este prezentată repartiția vitezei $u(z)$ pentru orientarea vitezei V_2 în sensul negativ al axei Ox . În figura 6.10. b) sunt prezentate repartițiile vitezei $u(z)$ pentru orientarea vitezei V_2 în sensul pozitiv al axei Ox ; curba 1 corespunde cazului $\partial p / \partial x = 0$, curbele 2, 3, 4 și 5 corespund la diferite valori negative ale gradientului.

Se determină debitul

$$Q = \int_0^h u \, dz = \int_0^h \left(\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h) + \frac{V_2}{h} z \right) dz = \frac{h^3}{12\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{V_2 h}{2} \quad (6.64)$$

și mărimea tensiunii tangențiale, la distanța z unde $du/dz < 0$,

$$\tau_{zx} = \eta \frac{du}{dz} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) (2z-h) - \eta \frac{V_2}{h}. \quad (6.65)$$

Studiul problemei mișcării permanente între două plăci plane paralele reprezintă un prim pas în abordarea teoriei hidrodinamice a lubrificației.

6.4.2. Mișcarea Hagen - Poiseuille

Numeroase aplicații tehnice se referă la transportul și distribuția fluidelor prin instalații hidraulice. De regulă, regimul de curgere prin sisteme hidraulice este turbulent, însă în unele cazuri, de exemplu curgerea păcurii și a produselor petroliere, poate fi și laminar. În cele ce urmează se prezintă studiul mișcării laminare printr-o conductă circulară.

Fie o conductă circulară dreaptă orizontală de diametru D , prin care are loc mișcarea permanentă și uniformă a unui fluid real (fig. 6.11). Pentru rezolvarea acestui caz, cunoscut în literatură sub denumirea de *mișcarea Hagen-Poiseuille*, se integrează sistemul de ecuații Navier – Stokes în coordonate cilindrice (prezentat în anexa 1, cu observația că aici axa Oz se notează cu Ox și componenta vitezei V_z cu u). Se admit ipotezele:

$$1) \text{ curgerea este permanentă } \left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right);$$

$$2) \text{ curgerea este axial simetrică } V_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0;$$

$$3) \text{ curgerea se desfășoară în lungul axei orizontale } Ox, \text{ deci } u = u(r, x), \quad V_r = 0.$$

4) curgerea se datorește scăderii presiunii în lungul axei Ox .

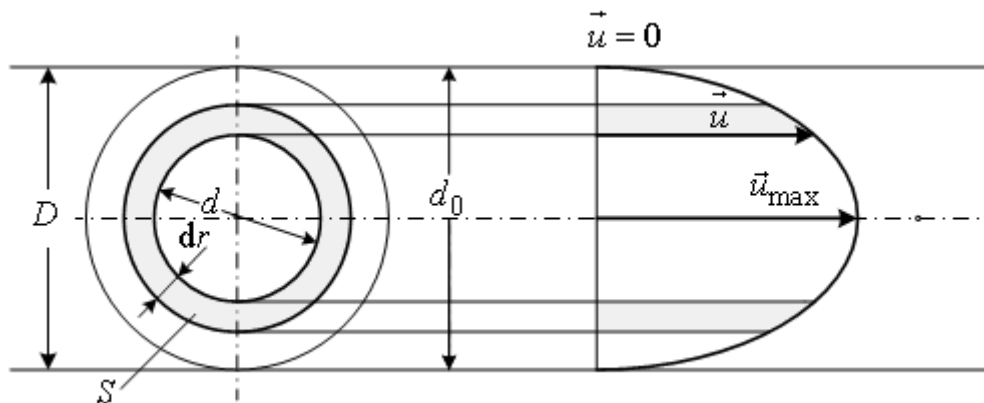


Fig. 6.11. Repartiția vitezelor în mișcarea laminară a fluidelor reale în conducte circulare.

Sistemul de ecuații Navier Stokes se scrie sub forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (6.66)$$

$$0 = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (6.67)$$

$$0 = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (6.68)$$

Din ultimile două ecuații se observă că în plane perpendiculare pe axa conductei presiunea are o variație hidrostatică. Ținând seama de ecuația continuității (anexa 2),

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V_r}{r} = 0, \quad (6.69)$$

se deduce $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ și pentru o conductă orizontală relația (6.66) devine,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (6.70)$$

Deoarece $p = p(x)$ și $u = u(r)$, se poate scrie

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\eta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \right]. \quad (6.71)$$

Se consideră $dp/dx = \text{const.}$ și, integrând o dată în raport cu $r = d/2$, se obține

$$0 = -\frac{r^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} + r \frac{du}{dr} + C_1. \quad (6.72)$$

Pe axa conductei $r = 0$ și viteza este maximă, deci $\frac{du}{dr} = 0$. Rezultă $C_1 = 0$ și relația (6.72) devine

$$0 = -\frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dr}. \quad (6.73)$$

După o a doua integrare se obține

$$u = -\frac{r^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) + C_2. \quad (6.74)$$

Constanta C_2 se determină din condiția la perete: pentru $r = r_0 = d/2$, viteza este nulă $u = 0$, deci $C_2 = \frac{r_0^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$. Rezultă că repartitia de viteze se determină cu expresia

$$u = \frac{r_0^2 - r^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (6.75)$$

Se observă că reprezentarea grafică a repartiției de viteze este o parabolă. Viteza maximă este atinsă pentru $r = 0$ și are valoarea

$$u_{max} = \frac{r_0^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (6.76)$$

Relația (6.76) se scrie sub formă adimensională,

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (6.77)$$

Repartiția de viteze este parabolică și este independentă de dimensiunile absolute ale conductei și de natura fluidului. Debitul se determină cu expresia

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S u r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} u r dr = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{r_0^2 - r^2}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) r dr = \\ &= \frac{\pi}{2\eta} \left(r_0^2 \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) \left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\pi r_0^4}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Viteza medie este

$$u_{med} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\frac{\pi r_0^4}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right)}{\pi r_0^2} = \frac{r_0^2}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{1}{2} u_{max}. \quad (6.79)$$

Tensiunea tangențială are expresia

$$\tau_{rx} = -\eta \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (6.80)$$

iar, tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{rx_{max}} = \frac{r_0}{2} \left(-\frac{dp}{dx} \right), \quad (6.81)$$

deci

$$\frac{\tau_{rx}}{\tau_{rx_{max}}} = \frac{r}{r_0} . \quad (6.82)$$

În consecință, repartiția tensiunilor tangențiale este liniară și este independentă de dimensiunile absolute ale conductei și de natura fluidului.

Dacă presiunea scade liniar în lungul axei Ox , cu valoarea Δp (care se poate măsura cu un manometru diferențial), gradientul de presiune între punctele 1 și 2 situate la distanța l este

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{l} . \quad (6.83)$$

Rezultă repartiția vitezei

$$u = \frac{r_0^2 - r^2}{4\eta l} (p_1 - p_2) , \quad (6.84)$$

debitul

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\eta l} (p_1 - p_2) , \quad (6.85)$$

viteza medie

$$u_{med} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{r_0^2}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} , \quad (6.86)$$

și tensiunea tangențială

$$\tau_{rx} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2l} . \quad (6.87)$$

6.4.3. Pierderea de sarcină la curgerea laminară într-o conductă circulară (formula lui Darcy)

Se consideră o conductă circulară, orizontală, de diametru constant D prin care circulă un fluid incompresibil în mișcare uniformă laminară. Se

scrie relația lui Bernoulli între două puncte 1 și 2 și se calculează pierderile de sarcină între cele două puncte

$$h_{r_{1-2}} = \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right). \quad (6.88)$$

Conducta fiind orizontală, $z_1 = z_2$, și de diametru constant, $V_1 = V_2$, relația anterioară devine ținând seama de (6.79),

$$h_{r_{1-2}} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8\eta l}{\gamma r_0^2} u_{med} = \frac{32\eta l}{\gamma D^2} u_{med} = \frac{32\nu l}{g D^2} u_{med}. \quad (6.89)$$

Numărul Reynolds se determină cu formula

$$Re = \frac{u_{med} D}{\nu}, \text{ deci } \nu = \frac{u_{med} D}{Re} \quad (6.90)$$

și rezultă

$$h_{r_{1-2}} = \frac{32 l \nu}{g D^2} u_{med} = \frac{32 l \frac{u_{med} D}{Re}}{g D^2} u_{med} = \frac{64 l}{Re D} \frac{u_{med}^2}{2g}. \quad (6.91)$$

Se notează cu λ expresia adimensională

$$\lambda = 64 / Re, \quad (6.92)$$

denumită *coeficientul Darcy*. Pierderea de sarcină între punctele 1 și 2 se determină cu *formula lui Darcy*

$$h_{r_{1-2}} = \lambda \frac{l}{D} \frac{u_{med}^2}{2g}. \quad (6.93)$$

Formal expresia se păstrează și pentru mișcări turbulente, valoarea și modalitatea de determinare a coeficientului lui Darcy fiind diferită.

Capitolul 7

DINAMICA FLUIDELOR VÂSCOASE ÎN REGIM TURBULENT

7.1. Caracteristicile mișcării turbulente

Majoritatea curgerilor întâlnite în tehnică, de exemplu în sisteme de conducte și în mașini hidraulice, sunt turbulente. Curgerea turbulentă este structural, fizic și energetic diferită de cea laminară.

7.1.1. Structura mișcării turbulente

Revenind la experiența lui Reynolds (subcapitolul 6.1) se constată că după depășirea unui anumit număr Reynolds critic, liniile de curent nu mai sunt aproximativ paralele cu direcția principală de curgere și apar vârtejuri ce se dispersează în fluid. În mișcarea turbulentă, grupuri de particulele fluide sunt amestecare și transportate dezordonat, în raport cu timpul și spațiul. Chiar dacă mișcarea de ansamblu este permanentă la scară macroscopică, mărimile hidrodinamice nu sunt constante, variind în jurul unor valori medii.

Curgerea turbulentă se caracterizează prin iregularități mari în timp și spațiu, descrierea ei în detaliu fiind practic imposibilă. În ansamblu însă, teoria probabilităților și statistica matematică pot oferi indicații privind legile care o guvernează. În principiu, se consideră că mișcarea turbulentă este determinată de suprapunerea unei mișcări fluctuante, în care sunt antrenate grupuri mari de particule peste o mișcare medie. Având în vedere neregularitatea și variația în timp și spațiu a tuturor mărimilor

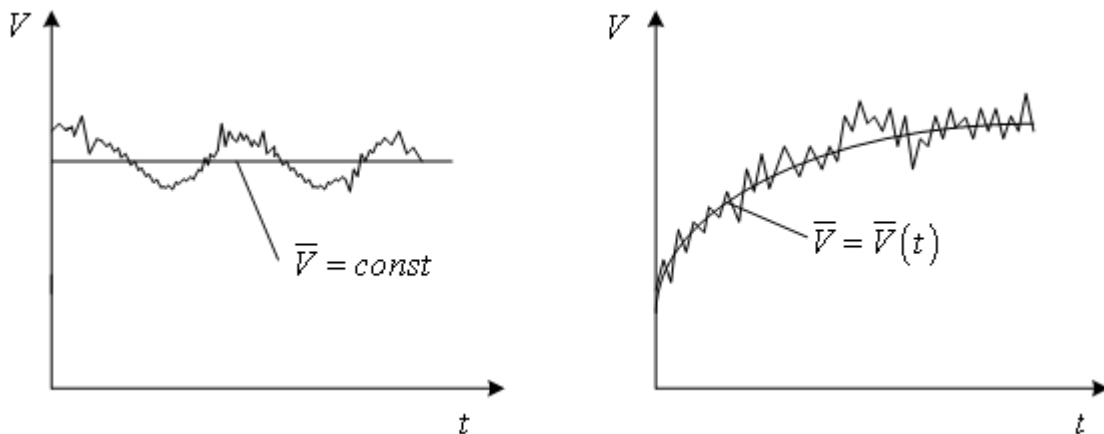
hidrodinamice, presiune, viteză, temperatură, studiul evoluției mărimilor instantanee nu are rost. Descrierea matematică apelează la metode de mediere, care permit trecerea de la mărimile instantanee la mărimi medii. O mărime hidrodinamică în mișcare turbulentă se compune dintr-o componentă medie \bar{f} și o componentă de pulsație (fluctuație) f' ,

$$f = \bar{f} + f'. \quad (7.1)$$

Pentru obținerea valorii medii se pot folosi în principiu patru metode diferite: medierea temporală, medierea spațială, medierea spațio-temporală și medierea statistică. Se definește media temporală prin

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f \, dt. \quad (7.2)$$

Intervalul de timp T se alege suficient de mare, pentru ca funcția de mediat să se repete cu o bună aproximație, dar mult mai mic decât intervalul de timp în care au loc variații macroscopice ce nu pot fi atribuite fenomenului de turbulență. În figura 7.1 se prezintă exemple de mișcare medie turbulentă permanentă și nepermanentă.



a) Mișcarea medie turbulentă permanentă.

b) Mișcarea medie turbulentă nepermanentă.

Fig. 7.1. Variația în timp a vitezei într-un punct al fluidului în mișcare turbulentă.

Dacă interesează viteza instantanee $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ într-un punct fixat, componentele acesteia se pot scrie ca fiind formate din valorile medii în timp $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ și componentele de pulsație u', v', w' ,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad (7.3)$$

unde valorile medii se calculează ca medii temporale într-un punct fix ,

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt. \quad (7.4)$$

Similar presiunea instantanee este

$$p = \bar{p} + p'. \quad (7.5)$$

O. Reynolds a stabilit o serie de proprietăți ale operatorului de mediere:

$$\overline{f + g} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (f + g) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g dt = \bar{f} + \bar{g}, \quad (7.6)$$

$$\overline{cf} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (cf) dt = c \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt = c \bar{f}, \quad c = \text{const.}, \quad (7.7)$$

$$\overline{f'} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f' dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{f} dt = \bar{f} - \bar{f} = 0, \quad (7.8)$$

$$\overline{fg} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bar{f}g) dt = \bar{f} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g dt = \bar{f} \bar{g}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt \right] = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_t^{t+T} f dt \right] = \frac{1}{T} \left[\int_t^{t+T} \frac{\partial f}{\partial x} dt \right] = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
\overline{f g} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f g dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bar{f} + f')(\bar{g} + g') dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{f} \bar{g} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{f} g' dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f' \bar{g} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f' g' dt = \\
&= \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} \quad (7.11)
\end{aligned}$$

Relațiile (7.6)-(7.11) sunt folosite la stabilirea ecuațiilor de mișcare a fluidelor vâskoase în mișcare turbulentă.

7.1.2. Analogia lui Bahmetev

S-a constatat experimental că repartiția vitezelor într-o mișcare turbulentă este mai aplatizată decât într-o curgere laminară (fig. 7.2). Explicația constă în transferul de masă între straturile vecine, datorită *amestecului turbulent*. Pentru a ilustra fenomenele care au loc între două straturi de fluid se poate face apel la analogia lui Bahmetev.

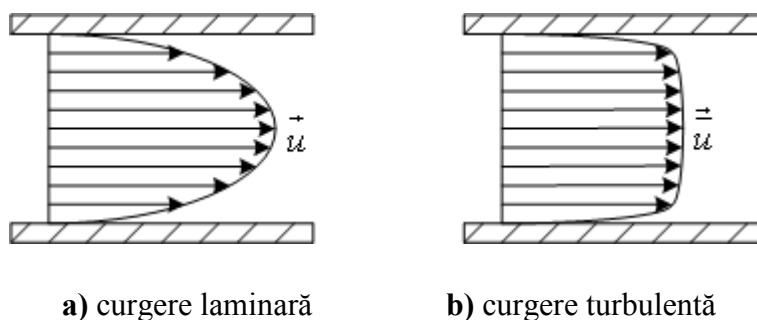


Fig. 7.2. Distribuția de viteze într-o conductă circulară.

Se imaginează două trenuri identice A și B care se deplasează paralel în aceeași direcție cu viteze diferite, viteza trenului A fiind mai mică decât viteza trenului B . În fiecare vagon se află un număr oarecare, același în toate vagoanele, de saci cu nisip de mase egale m , în dreptul fiecărui sac existând un om. Când trenurile sunt față în față, se aruncă sacii din trenul A în trenul B și invers (fig. 7.3). Masa transportată de trenuri rămâne aceeași, însă se constată creșterea vitezei trenului A și micșorarea vitezei trenului B , datorită schimbului de cantitate de mișcare. Astfel, la un schimb de câte un sac cantitatea de mișcare a trenului B scade cu valoarea $m(\vec{V}_B - \vec{V}_A)$, iar a

trenului A crește cu aceeași cantitate. Variația cantității de mișcare în intervalul de timp cât durează acest schimb de saci duce la apariția unor forțe care acționează asupra trenului A în sensul accelerării și asupra trenului B în sensul frânării. Se constată o tendință de uniformizare a vitezelor celor două trenuri.

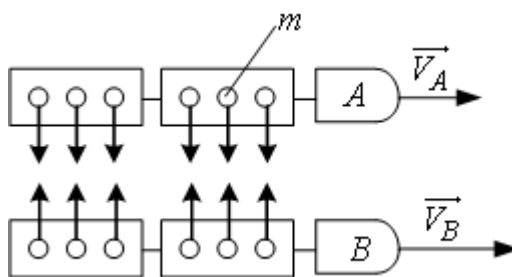


Fig. 7.3. Analogia lui Bahmetev.

Fenomenul este analog mișcării a două straturi de fluid vecine, dacă în locul sacilor se consideră particule fluide. În mișcarea turbulentă, datorită schimbului cantității de mișcare între straturi apar forțe tangențiale suplimentare, ce conduc la o tendință de egalizare a vitezelor, profilul de viteze în mișcarea turbulentă fiind aplatizat spre deosebire de cel din mișcarea laminară care este o parabolă (fig. 7.2). În ceea ce privește pierderile de energie s-a constatat experimental că acestea sunt mai mari în mișcarea turbulentă decât în cea laminară, ceea ce sugerează existența unor tensiuni suplimentare.

7.2. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim turbulent

Deducerea ecuațiilor de mișcare ale fluidelor vâskoase în regim turbulent se poate realiza pe mai multe căi. În cele ce urmează se prezintă două dintre cele mai cunoscute.

7.2.1. Tensiuni suplimentare turbulente aparente

Se consideră o curgere plană staționară în medie a unui fluid incompresibil între doi pereți plani paraleli, în care distribuția de viteze

medii are o anumită formă, iar liniile de curent medii sunt paralele cu pereții dați. Schimbul de cantități de mișcare între straturile vecine conduce la apariția de tensiuni turbulente pe suprafața de separație între straturi.

Fie două straturi de fluid învecinate notate A și B și un punct M situat de suprafața de separație dintre straturi, caracterizat prin viteza medie \bar{u} și componentele vitezei de pulsație u' și v' . Se consideră în jurul punctului ales elementul de suprafață dS , paralel cu axa Ox (fig. 7.4). În intervalul de timp dt , prin suprafața dS , trece datorită vitezei de pulsație v' masa elementară $dm = \rho dS |v'| dt$. Variația în direcția Ox a cantității de mișcare a acestei mase sub acțiunea componentei u' este $d(mu') = dm \cdot u' = \rho |v'| dS dt \cdot u'$. În conformitate cu legea a doua a dinamicii apare o forță tangențială suplimentară,

$$dF' = \frac{d(mu')}{dt} = \rho |v'| u' dS. \quad (7.12)$$

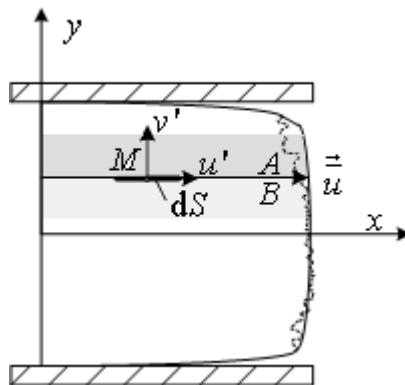


Fig. 7.4. Amestecul turbulent între două straturi vecine de fluid.

Valoarea medie în timp a acestei forțe, raportată la suprafața dS , este *tensiunea suplimentară turbulentă*, datorată amestecului turbulent,

$$\tau'_{yx} = -\rho \overline{u'v'}. \quad (7.13)$$

Se utilizează semnul minus, deoarece conform principiilor conservării masei, la o dilatare în sens longitudinal corespunde o contractare în sens transversal. Tensiunea suplimentară turbulentă se adaugă tensiunii tangențiale date de legea lui Newton $\tau_{yx \text{ lam}} = \eta \frac{du}{dy}$ pentru fluide vâscoase

(relația 1.13). În concluzie, în mișcarea turbulentă plană în direcția axei Ox , tensiunea tangențială se determină cu relația

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} + (-\rho \overline{u'v'}), \quad (7.14)$$

cunoscută în literatură sub denumirea de *formula lui Prandtl*.

Interesează valoarea tensiunilor suplimentare turbulente într-un punct oarecare dintr-o curgere spațială. Se consideră un punct $M(x, y, z)$ în interiorul unui fluid în mișcare turbulentă și în jurul acestui punct o suprafață elementară dS_x , paralelă cu planul yOz (fig. 7.5). Masa de fluid care trece prin suprafața dS_x , în intervalul de timp dt este $dm = \rho u dS_x dt$, iar componentele cantității de mișcare mediate în timp care traversează suprafața dS_x în direcțiile axelor Ox , Oy și Oz sunt $d\overline{H_x} = -\rho \overline{u u} dS_x dt$, $d\overline{H_y} = -\rho \overline{u v} dS_y dt$ și $d\overline{H_z} = -\rho \overline{u w} dS_z dt$, sau utilizând descompunerea vitezelor în valori medii și viteze de pulsație și formula (7.11),

$$d\overline{H_x} = -\rho (\overline{u u} + \overline{u' u'}) dS_x dt, \quad (7.15)$$

$$d\overline{H_y} = -\rho (\overline{u v} + \overline{u' v'}) dS_x dt, \quad (7.16)$$

$$d\overline{H_z} = -\rho (\overline{u w} + \overline{u' w'}) dS_x dt. \quad (7.17)$$

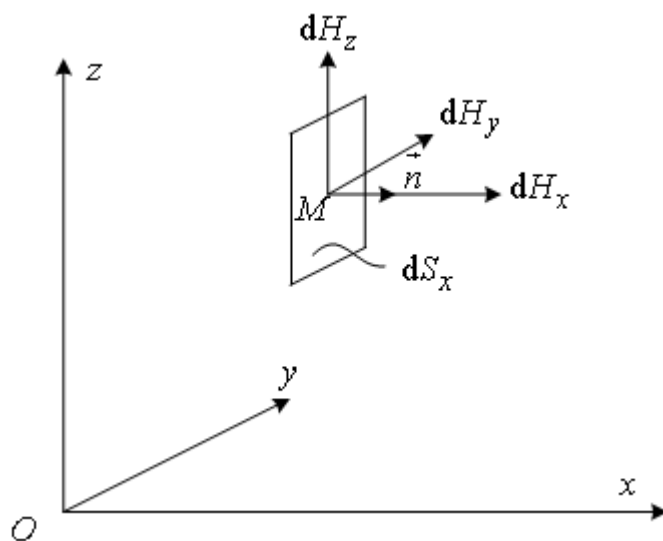


Fig. 7.5. Componentele cantității de mișcare al masei de fluid care traversează suprafața dS_x .

Conform principiului variației impulsului (2.8), se calculează componentele forței care se exercită pe suprafața dS_x în cele trei direcții,

$$d\overline{F'_{xx}} = \frac{d\overline{H_x}}{dt} = -\rho(\overline{uu} + \overline{u'u'})dS_x, \quad (7.18)$$

$$d\overline{F'_{xy}} = \frac{d\overline{H_y}}{dt} = -\rho(\overline{uv} + \overline{u'v'})dS_x, \quad (7.19)$$

$$d\overline{F'_{xz}} = \frac{d\overline{H_z}}{dt} = -\rho(\overline{uw} + \overline{u'w'})dS_x. \quad (7.20)$$

Rezultă că pe elementul de suprafață dS_x se exercită tensiunea normală $-\rho(\overline{uu} + \overline{u'u'})$ în direcția axei Ox , tensiunea tangențială $-\rho(\overline{uv} + \overline{u'v'})$ în direcția axei Oy și tensiunea tangențială $-\rho(\overline{uw} + \overline{u'w'})$ în direcția axei Oz .

În concluzie, pe planul normal axei Ox , pulsațiile turbulente conduc la apariția tensiunilor suplimentare,

$$\tau'_{xx} = -\rho\overline{u'u'}, \quad \tau'_{xy} = -\rho\overline{u'v'}, \quad \tau'_{xz} = -\rho\overline{u'w'}. \quad (7.21)$$

Prin permutări se obțin tensiunile suplimentare turbulente și pe suprafețele dS_y și dS_z ,

$$\tau'_{yx} = -\rho\overline{v'u'}, \quad \tau'_{yy} = -\rho\overline{v'v'}, \quad \tau'_{yz} = -\rho\overline{v'w'}, \quad (7.22)$$

$$\tau'_{zx} = -\rho\overline{w'u'}, \quad \tau'_{zy} = -\rho\overline{w'v'}, \quad \tau'_{zz} = -\rho\overline{w'w'}. \quad (7.23)$$

Tensiunile suplimentare turbulente normale, $\tau'_{xx}, \tau'_{yy}, \tau'_{zz}$, sunt negative, fiind orientate către elementele de suprafață considerate (ca și presiunile), iar cele tangențiale sunt pozitive, $\tau'_{xy} = \tau'_{yx}, \tau'_{yz} = \tau'_{zy}, \tau'_{zx} = \tau'_{xz}$ datorită variației în sens contrar a pulsațiilor turbulente corespunzătoare. Tensiunile suplimentare formează un tensor simetric de ordinul al doilea numit

tensorul tensiunilor suplimentare turbulente sau de amestec cu șase componente distincte,

$$\Rightarrow \vec{T}' = \begin{bmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{yx} & \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} & \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'u'} & -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{w'u'} \\ -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{v'v'} & -\rho \overline{w'v'} \\ -\rho \overline{u'w'} & -\rho \overline{v'w'} & -\rho \overline{w'w'} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Tensiunile suplimentare turbulente se adaugă tensiunilor apărute în mișcarea laminară datorită viscozității, astfel încât tensiunile pentru curgerea turbulentă se calculează cu expresia,

$$\begin{aligned} \vec{T} = & \left(-\bar{p} + \lambda \bar{\theta} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ & + 2\eta \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{w'u'} \\ -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{w'v'} \\ -\rho \overline{u'w'} & -\rho \overline{v'w'} & -\rho \overline{w'^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Se constată că tensiunile ce apar în curgerea turbulentă conțin un termen suplimentar față de curgerea laminară, ceea ce explică pierderile de energie mai mari în mișcarea turbulentă față de cele corespunzătoare mișcării laminare.

7.2.2. Ecuațiile lui Reynolds

Deducerea ecuațiilor de mișcare ale fluidelor vâscoase în regim turbulent cunoscute în literatură sub denumirea de ecuațiile lui Reynolds, poate fi efectuată prin înlocuirea în ecuațiile Cauchy (2.55–2.56) a expresiei tensorului tensiunilor turbulente (7.25). Pentru un fluid compresibil se obțin *ecuațiile Reynolds*, sau *ecuațiile mișcării turbulente* pentru fluide compresibile. Din ecuațiile (7.26), se observă că sistemul Navier-Stokes s-a modificat prin adăugarea unor termeni suplimentari.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'u'}) \right], \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'v'}) \right], \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'w'}) \right]. \end{aligned} \right. \quad (7.26)$$

Calea clasică de deducere a ecuațiilor Reynolds este utilizarea operațiilor de mediere (7.6-7.11) pentru sistemul de ecuații (6.12) format din ecuațiile Navier-Stokes și ecuația continuității pentru un fluid incompresibil. Se pornește de la prima relație a sistemului scrisă sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (7.27)$$

Se mediază relația (7.27) și rezultă

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \Delta \bar{u} - \left[\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial z} \right] . \quad (7.28)$$

Se scrie ultima paranteză, astfel încât să se evidențieze expresiile tensiunilor suplimentare turbulente și se obține

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{\text{componenta locală a forțelor de inerție pe unitatea de masă}} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\text{componenta convectivă a forțelor de inerție pe unitatea de masă}} = \underbrace{F_{mx}}_{\text{forța exterioară, masică pe unitatea de masă}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{\text{forța superficială de presiune, pe unitatea de masă}} + \underbrace{\bar{v} \Delta \bar{u}}_{\text{forța superficială de viscozitate pe unitatea de masă}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'u'}) \right]}_{\text{forța superficială datorată pulsațiilor turbulente, pe unitatea de masă}} . \quad (7.29)$$

Ecuția continuității devine prin mediere

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 . \quad (7.30)$$

Adăugând și ecuația continuității (7.30) la ecuațiile obținute prin permutări circulare din ecuația (7.29) se obține sistemul (7.31) pentru curgerea turbulentă a unui fluid incompresibil. Sistemul are 4 ecuații și 10 necunoscute, componentele vitezei medii, presiunea și tensiunile suplimentare turbulente.

Problema principală a teoriei turbulenței este identificarea a încă 6 relații care să stabilească o legătură între necunoscutele $-\rho \overline{u'u'}$, $-\rho \overline{v'v'}$, $-\rho \overline{w'w'}$, $-\rho \overline{u'v'}$, $-\rho \overline{u'w'}$, $-\rho \overline{v'w'}$ și restul mărimilor. Până în prezent nu au putut fi stabilite ecuații de închidere universal valabile și fie se apelează la *teoria statistică a turbulenței*, fie pentru cazuri particulare de mișcări se adoptă *relații semiempirice* verificate experimental.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = F_{mx} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} + \\
 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'u'}) \right] \\
 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = F_{my} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} + \\
 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'v'}) \right] \\
 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = F_{mz} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} + \\
 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'w'}) \right] \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0
 \end{array} \right. \quad (7.31)$$

Chiar prin aceste metode, nu se obțin rezultate care să oglindească pe deplin fenomenul turbulenței, deoarece rugozitatea și natura pereților pot modifica semnificativ curgerea. În concluzie, se poate afirma că fenomenul turbulenței este departe de a fi elucidat.

În ceea ce privește, condițiile la limită pentru sistemele de ecuații (7.26), respectiv (7.31), acestea sunt identice pentru mărimile medii din mișcarea turbulentă cu cele din mișcarea laminară.

7.3. Relația lui Bernoulli pentru mișcarea turbulentă

Se procedează ca în cazul mișcării laminare, scriindu-se ecuațiile Reynolds (7.26) sub forma Helmholtz. Se admite că forțele masice derivă dintr-un potențial și fluidul este barotrop. Rezultă

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U \right) + \bar{w} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \nu \Delta \bar{u} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'u'}) \right] \\
& \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U \right) + \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \bar{w} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \nu \Delta \bar{v} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'v'}) \right] \\
& \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U \right) + \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) = \nu \Delta \bar{w} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'w'}) \right] .
\end{aligned} \right. \quad (7.32)$$

Se înmulțesc cele trei ecuații (7.32) cu deplasările elementare dx , dy , dz și se sumează. Se obține

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} dx + \bar{v} dy + \bar{w} dz) + d \left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U \right) + 2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{\omega_x} & \frac{dy}{\omega_y} & \frac{dz}{\omega_z} \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{vmatrix} = -\delta l_v - \delta l_t \quad (7.33)$$

unde lucrul mecanic elementar al tensiunilor turbulente aparente este

$$\begin{aligned}
-\delta l_t = & \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'u'}) \right] dx + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'v'}) \right] dy + \\
& + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{w'w'}) \right] dz .
\end{aligned} \quad (7.34)$$

Termenii $-\delta l_v$ și $-\delta l_t$ sunt negativi, deoarece forțele de vîscozitate și tensiunile turbulente aparente sunt dirijate în sens invers sensului de mișcare a fluidului.

Pentru mișcarea permanentă din relația (7.33) se obține

$$d\left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U\right) + 2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{\bar{u}} & \frac{dy}{\bar{v}} & \frac{dz}{\bar{w}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = -\delta l_r. \quad (7.35)$$

Suma dintre lucrul mecanic al forțelor de vîscozitate și lucrul mecanic al tensiunilor aparente este lucrul mecanic rezistiv, $-\delta l_r = -\delta l_v - \delta l_t$.

Dacă integrarea se efectuează pe o linie de curent, pe o linie de vârtej sau între două puncte aflate în mișcare elicoidală, determinantul se anulează și se obține expresia,

$$d\left(\frac{\bar{V}^2}{2} + \int \frac{d\bar{p}}{\rho} + U\right) = -\delta l_r. \quad (7.36)$$

În cazul fluidelor incompresibile grele, relația Bernoulli se scrie

$$\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + \frac{\bar{p}_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + \frac{\bar{p}_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}}, \quad (7.37)$$

unde $h_{r_{1-2}} = -\frac{1}{g} \int_{1,2} \delta l_r$ reprezintă pierderea de sarcină între punctele 1 și 2

de pe linia de curent.

Expresiile relației lui Bernoulli corespunzătoare fluidelor incompresibile și compresibile ușoare în mișcare turbulentă sunt similare formal relațiilor Bernoulli pentru curgerea laminară (6.27-6.31) cu

observația că lucrul mecanic unitar al forțelor de vîscozitate $\int_{1,2} \delta l_v$ se

înlocuiește cu lucrul mecanic unitar al forțelor rezistive $\int_{1,2} \delta l_r$.

7.4. Teoriile semiempirice ale turbulenței

Deoarece mișcarea turbulentă este haotică, o caracteristică esențială a ei o constituie fenomenul de difuzie, realizat prin schimbul rapid al particulelor fluide între ele și al caracteristicilor fizice pe care le poartă. Ecuatiile și teoriile stabilite prin teorii semiempirice se bazează pe considerații de ordin teoretic strâns legate de experimente. Sunt introduse ipoteze privind tensiunile aparente, alături de relații de legătură între acestea și componentele medii ale vitezei.

O altă modalitate de a studia turbulența este utilizarea teoriilor statistice. Tratarea statistică a turbulenței are la bază ecuațiile de mișcare puse sub o formă care include proprietățile statistice ale câmpului aleator al fluctuațiilor turbulente. Studiul prin această metodă necesită o analiză statistică aprofundată, bazată pe numeroase măsurători de mare precizie.

Indiferent de modalitatea de abordare, descrierea matematică a fenomenului turbulenței este complicată și în momentul actual nu este definitiv încheiată. Stadiul actual al cercetărilor permite totuși rezolvarea a numeroase probleme practice.

7.4.1. Teoria coeficientului de viscozitate turbulentă al lui Boussinesq

Pentru curgeri laminare (din conducte, straturi limită, jeturi) este valabilă legea lui Newton (1.13). Prin analogie, în cazul mișcării turbulente plane uniforme în direcția axei Ox , Boussinesq (1877) a introdus coeficientul de viscozitate turbulentă ε , de aceeași dimensiune cu viscozitatea dinamică (moleculară) η ,

$$-\rho \overline{u'v'} = \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (7.38)$$

Conform teoriei lui Boussinesq, tensiunea tangențială este o funcție liniară de gradientul vitezei medii

$$\tau = (\eta + \varepsilon) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (7.39)$$

Spre deosebire de coeficientul de viscozitate laminară care corespunde unei proprietăți fizice a fluidului, coeficientul de viscozitate

turbulentă ε ar trebui să depindă de particularitățile curgerii respective și de poziția punctului. Plecând de la presupunerea că atât agitația moleculară existentă și în curgerea laminară, cât și cea macroscopică datorată turbulenței conduc la efecte medii asemănătoare, teoria lui Boussinesq admite ipoteza $\varepsilon = \text{const.}$ Este puțin plauzibilă o asemenea presupunere, deoarece de exemplu ar implica o distribuție a vitezelor în curgerea turbulentă similară celei laminare, iar variațiile mari de cantitate de mișcare datorită fluctuațiilor ar fi complet ignorate.

În ciuda acestor limitări esențiale, ipoteza viscozității turbulente constante aplicată curgerilor cu frontiere libere (jeturi, dâre etc.) conduce uneori la rezultate conforme cu experiența. În practică, teoria coeficientului de viscozitate turbulentă a lui Boussinesq se utilizează în cazul mișcării straturilor de aer atmosferic sau chiar ale apelor mărilor și oceanelor, iar rezultatele constituie un prim pas, ce permite acumularea de informații utile pentru calcule mai precise.

7.4.2. Teorii privind lungimea de amestec

Multă vreme cea mai utilizată metodă de închidere a ecuațiilor curgerii turbulente a constat în utilizarea noțiunii de *lungime de amestec*. Acest concept corespunde fizic distanței parcursă de o particulă pe o direcție transversală curgerii medii cu conservarea caracteristicilor, înainte de a fi modificate conform noii vecinătăți. Deși în realitate fenomenele sunt mult mai complicate, adoptarea conceptului de lungime de amestec a contribuit la stabilirea unor relații semiempirice, confirmate de experimente. Modelul fizic original al lungimii de amestec l-a constituit analogia cu teoria cinetică a gazelor, potrivit căreia proprietățile moleculelor rămân neschimbate între două ciocniri succesive.

Teoria lui Prandtl (1925) se bazează pe ideea conservării cantității de mișcare pe o distanță egală cu lungimea de amestec. Se consideră repartiția de viteze pentru o curgere turbulentă, plană, staționară în medie, în lungul unui perete (fig. 7.6). Se presupune că la distanța y_0 de perete se află o particulă macroscopică care antrenată de viteza de pulsație v' se deplasează pe o distanță egală cu lungimea de amestec l , conservându-și componenta după axa Ox a cantității de mișcare. Astfel, o particulă din stratul de viteză $\bar{u}(y_0 - l)$ se deplasează în stratul de viteză $\bar{u}(y_0)$ sub influența vitezei transversale $v' > 0$, ceea ce conduce la o diferență între viteza stratului de sosire și cea a particulei

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_0) - \bar{u}(y_0 - l) = l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right). \quad (7.40)$$

Analog, o particulă din stratul de viteză $\bar{u}(y_0 + l)$ supusă vitezei transversale $v' < 0$ ajunge în stratul de viteză $\bar{u}(y_0)$, cu o diferență între viteza particulei și cea a stratului

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_0 + l) - \bar{u}(y_0) = l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right). \quad (7.41)$$

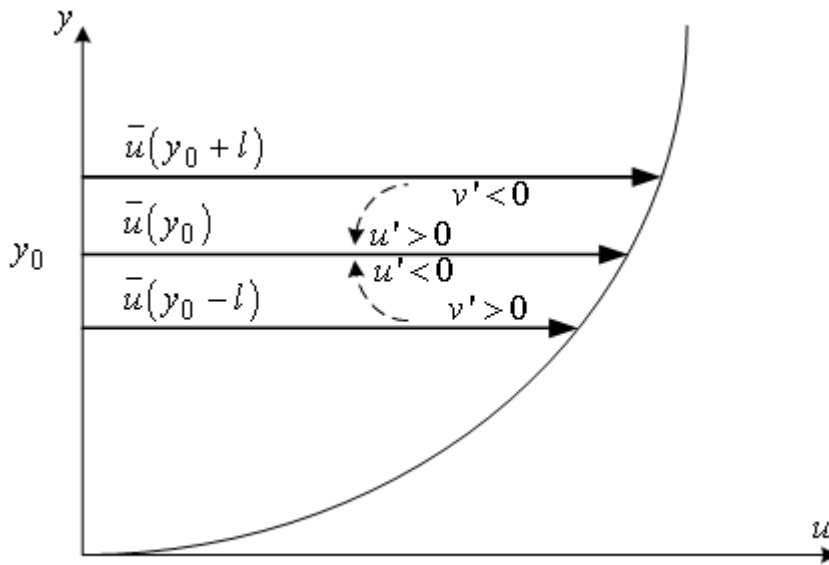


Fig. 7.6. Schema procesului de amestec turbulent.

Diferențele de viteză calculate cu relațiile anterioare pot fi interpretate ca fluctuații ale vitezei longitudinale, de modul

$$|u'| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) \right|. \quad (7.42)$$

Din figura 7.6 se observă că particulele care ajung în stratul y_0 antrenate de viteza $v' > 0$ conduc la o viteză de fluctuație longitudinală $u' < 0$, în timp ce particulele de pe stratul $y_0 - l$ antrenate de viteza $v' < 0$ provoacă o viteză fluctuantă longitudinală $u' > 0$. În concluzie, produsul $u'v'$ este negativ.

Se consideră că v' este proporțional cu u' , și ținând seama că tensiunea turbulentă tangențială trebuie să-și schimbe semnul odată cu derivata \overline{du}/dy , se obține *formula lui Prandtl*,

$$\tau' = \rho l^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right| \frac{d\overline{u}}{dy} . \quad (7.43)$$

Lungimea de amestec se determină empiric. Pentru curgeri turbulente libere (zone de amestec, jeturi, dâre) Prandtl consideră că lungimea de amestec l este constantă în fiecare secțiune transversală și proporțională cu grosimea stratului de amestec. Constanta de proporționalitate depinde de curgerea studiată. În cazul straturilor limită turbulente se utilizează, în vecinătatea peretelui, o lungime de amestec proporțională cu distanța y de la perete

$$l = \kappa y , \quad (7.44)$$

unde $\kappa \cong 0,4$ este constanta lui Kármán.

În regiunea externă stratului limită, lungimea de amestec, l trebuie să fie proporțională cu grosimea stratului limită. Deoarece alegerea lungimii de amestec depinde de tipul de curgere examinat, modelele de turbulență bazate pe această noțiune nu au un grad de generalitate ridicat.

O altă teorie bazată pe noțiunea de lungime de amestec a fost propusă de **G. I. Taylor** (1932). Raționamentul său se bazează pe ipoteza transportului de vârtejuri (vorticități), sugerat de faptul că într-o curgere bidimensională vorticitatea respectă legi de conservare asemănătoare celei a căldurii, cu excepția unor efecte de difuzitate de scară mică. Se propune pentru curgerea plan paralelă în cazul unei mișcări stratificate, $\overline{u} = \overline{u}(y)$ utilizarea relației

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'}{\partial y} = \overline{v\omega} = l^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right| \frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} , \quad (7.45)$$

unde fluctuația de vârtej este $\overline{\omega} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$.

Metoda lui Prandtl este cunoscută sub denumirea de *teoria de transport a cantității de mișcare*, iar cea a lui Taylor de *teoria transportului vârtejurilor*. De remarcat că relațiile propuse de L. Prandtl și G. I. Taylor

nu sunt aplicabile în punctele în care derivata \overline{du}/dy se anulează, deci în secțiunile curgerii unde viteza este maximă sau minimă.

Von Kármán (1941) a propus la rândul lui o teorie bazată pe ipotezele:

1) lungimea de amestec este determinată de condițiile locale descrise prin termeni ce depind de condițiile locale, cum ar fi prima și a doua derivată a vitezei medii într-un punct;

2) toate câmpurile pulsatorii sunt asemenea între ele.

Dacă se consideră o curgere plană cu viteza medie în direcția axei Ox , din condiția de similitudinea geometrică rezultă

$$l \frac{\left(\frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} \right)}{\left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)} = \kappa = \text{const} \quad \text{sau} \quad l = \kappa \frac{\left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)}{\left(\frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} \right)} . \quad (7.46)$$

Introducând valoarea lungimii de amestec calculată conform formulei lui Prandtl rezultă

$$\tau' = \rho^2 \kappa \frac{\left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} \right)^2} . \quad (7.47)$$

În ceea ce privește teoria lui Kármán, conform relației (7.47) ar rezulta o tensiune tangențială infinită, când $d^2 \overline{u}/dy^2 = 0$, ceea ce nu este plauzibil. Au fost propuse și alte formule de calcul, însă expresiile sunt complicate, dificil de utilizat.

Trebuie menționat că expresiile propuse pentru lungimea de amestec conțin coeficienți empirici selectați astfel încât să corespundă observațiilor experimentale. Studiile arată că ipotezele lungimii de amestec și cea a difuziei de tip gradient nu reprezintă corect procesele fizice ale amestecului turbulent, astfel încât nu pot furniza o bază sigură pentru determinarea curgerilor turbulente complexe. Pentru turbulența liberă și zona centrală a curgerilor mărginite de pereți solizi, relația lui Taylor oferă rezultate bune, deoarece aici se observă mișcări bidimensionale importante, ca de pildă vârtejurile din siajul unui cilindru. În zona afectată de perete, teoria lui

Prandtl s-a dovedit mai eficientă. Aici, pentru curgerea deplin turbulentă din apropierea pereților este recomandabilă și teoria lui Kármán, deoarece scara vârtejurilor ce contribuie la procesul de amestec turbulent crește cu distanța la perete.

Concluzia generală este că teoriile bazate pe conceptul de lungime de amestec nu se justifică decât în cazuri particulare, în studiul unor anumite probleme, ca de exemplu studii de teoria lubrificației sau ale mișcării turbulente cu suprafață liberă.

7.5. Repartiția vitezelor medii în vecinătatea unui perete

Turbulența la perete poate fi descrisă ca mișcarea fluidului a cărei structură este afectată direct de prezența pereților solizi. Se pot deosebi pentru pereți impermeabili, rigizi două categorii de curgeri: mișcarea în jurul corpului și mișcarea între pereți. În primul caz, turbulența la perete se manifestă prin apariția unui strat limită turbulent a cărei grosime crește în lungul corpului, în cel de-al doilea turbulența este condiționată de spațiul dintre pereți.

În zona peretelui, natura și configurația acestuia determină modalitatea de desfășurare a curgerii turbulente, regiunea fiind cunoscută sub denumirea de *zonă turbulentă controlată de perete* ("wall turbulence"). Pentru pereți netezi, efectele datorate peretelui sesizate mai ales în porțiunea din imediata vecinătate a acestuia apar datorită tensiunilor de viscozitate, pe când pentru un perete rugos efectele apar datorită acțiunii forțelor care rezultă din curgerea în jurul elementelor de rugozitate.

În cazul pereților netezi, zona turbulentă controlată de perete, poate fi împărțită în trei subdomenii: un *substrat vâscos* caracterizat de un gradient mare al vitezei, o *zonă de tranziție* în care efectele viscozității moleculare și al turbulenței au același ordin de mărime și o *regiune deplin turbulentă*. În afara zonei controlate de perete, denumită *nucleu turbulent* parametrii mișcării depind de proprietățile fluidului și de condițiile la limită externe, fiind independentă de condițiile la limită la perete. Cele două zone sunt racordate printr-un strat intermediar.

Analiza mai detaliată a curgerii turbulente va fi prezentată în altă lucrare, în acest subcapitol discuția este limitată la curgerea bidimensională, în lungul unui perete plan infinit, iar mărimile care

caracterizează mișcarea fluctuantă nu variază în lungul peretelui $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$, $\bar{p} = \bar{p}(y)$ și $\tau = \tau(y)$.

În imediata vecinătate a peretelui, în substratul vâscos, tensiunile turbulente sunt neglijabile în raport cu tensiunile vâskoase,

$$\tau_0 = \eta \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = \text{const}, \quad (7.48)$$

de unde rezultă

$$\bar{u} = \tau_0 \frac{y}{\eta}, \quad (7.49)$$

adică viteza medie variază liniar cu distanța y față de perete.

Se acceptă ipoteza că valoarea tensiunii totale este constantă în lungul axei Oy , adică egală cu tensiunea la perete τ_0 . În zona de tranziție în care tensiunile turbulente τ' sunt de același ordin de mărime cu tensiunile vâskoase este valabilă relația,

$$\tau_0 = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} + \tau'. \quad (7.50)$$

În regiunea deplin turbulentă, tensiunile vâskoase sunt neglijabile față de cele de turbulență și

$$\tau_0 = \tau'. \quad (7.51)$$

Repartiția vitezei în vecinătatea unei suprafețe solide plane poate fi determinată cu ajutorul teoriei semiempirice a lui Prandtl. Din relațiile (7.43) și (7.44) în ipoteza tensiunii turbulente constante de-a lungul axei Oy , egală cu tensiunea la perete, rezultă

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (7.52)$$

Se definește viteza de frecare la perete

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (7.53)$$

și legea lui Prandtl (7.52) devine

$$u^* = \kappa y \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad (7.54)$$

de unde rezultă prin integrare *legea logaritmică de distribuție a vitezelor*

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const}, \quad (7.55)$$

constanta κ fiind definită în vecinătatea peretelui.

Expresia (7.55) constituie *legea universală de distribuție a vitezelor*.

Fie k înălțimea medie a asperităților, definită ca *rugozitatea absolută*. În cazul general legea universală de distribuție a vitezelor poate fi exprimată, din considerente de analiză dimensională, ca o funcție de forma

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = f\left(\frac{u^* y}{\nu}, \frac{u^* k}{\nu}\right). \quad (7.56)$$

Pentru perete neted se consideră $k=0$. În substratul vâscos, din relația (7.49) se deduce

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = u^* \frac{y}{\nu}. \quad (7.57)$$

Dacă se introduc mărimile adimensionale

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \text{ și } y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad (7.58)$$

în relația (7.57) se obține, în substratul vâscos, expresia

$$\bar{u}^+ = y^+. \quad (7.59)$$

În regiunea deplin turbulentă integrarea relației (7.55) scrisă cu mărimi adimensionale conduce la formula logaritmică,

$$\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \text{const.} \quad (7.60)$$

Dacă peretele este rugos se obține deasemenea o lege logaritmică, care depinde de rugozitatea k ,

$$\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + \text{const.} \quad (7.61)$$

Constanta se determină din condiția impusă în vecinătatea peretelui $\overline{u} = 0$ pentru $y = y_0$. Problema principală este determinarea distanței y_0 stabilită în funcție de înălțimea și forma rugozităților.

Aplicația 7.1.

Să se stabilească legea de distribuție a vitezei medii \overline{u} a unui fluid incompresibil, într-o conductă circulară netedă de rază r_0 , dacă viteza maximă în axul conductei este $\overline{u_{max}}$. Să se determine viteza medie a fluidului care circulă prin conductă.

Soluție

Se consideră substratul vâscos de grosime δ' . Se aplică legea logaritmică de distribuție a vitezelor, valabilă la distanță de perete,

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C.$$

În axul conductei pentru $y = r_0$, viteza mediată $\overline{u} = \overline{u_{max}}$, deci

$$\frac{\overline{u_{max}}}{\overline{u}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln r_0 + C \Rightarrow C = \frac{\overline{u_{max}}}{\overline{u}^*} - \frac{1}{\kappa} \ln r_0.$$

Legea universală de distribuție a vitezelor devine

$$\frac{\overline{u} - \overline{u_{max}}}{\overline{u}^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0}.$$

Debitul care circulă prin conductă în zona deplin turbulentă se calculează

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0 - \delta} \bar{u} r dr = 2\pi \int_{\delta}^{r_0} \left(\overline{u_{max}} + \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} \right) (r_0 - y) dy.$$

Deoarece debitul vehiculat prin substratul vâscos este foarte mic, practic neglijabil, se consideră viteza medie prin conductă

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = 2 \int_{\frac{\delta}{r_0}}^1 \left(\overline{u_{max}} + \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} \right) \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) d\left(\frac{y}{r_0} \right).$$

Integrând se obține

$$\begin{aligned} V &= 2\overline{u_{max}} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{y}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right] + \\ &+ 2\frac{u^*}{\kappa} \left[-\left(\frac{y}{r_0} \right) \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) - 1 + \left(\frac{y}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right] = \\ &= \overline{u_{max}} + \overline{u_{max}} \left[\left(\frac{y}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right) \right] + \\ &+ \frac{2u^*}{\kappa} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) - \left(\frac{y}{r_0} \right) \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) + \left(\frac{y}{r_0} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right) - \frac{3}{4} \right]. \end{aligned}$$

Grosimea substratului vâscos δ' reprezintă 1-2% din valoarea razei. Într-o primă aproximație se pot considera termenii y/r_0 și $y/r_0 \ln(y/r_0)$ neglijabili. Se obține valoarea vitezei medii

$$V = \overline{u_{max}} - \frac{3}{2} \frac{u^*}{\kappa},$$

în concordanță cu rezultatele experimentale.

ANEXA 1

	Greutatea specifică $\gamma \left[\text{N/m}^3 \right]$	Densitatea $\rho \left[\text{kg/m}^3 \right]$	Tensiunea superficială $\sigma \left[\text{N/m} \right]$
Alcool etilic	7 740	789	0,022
Benzen	8 623	879	0,029
Gazolină	6 671	680	-
Glicerină	12 360	1 260	0,063
Kerosen	7 936	809	0,025
Mercur	132 8860	13 546	0,467
Apă	9 790	998	0,073

Tabelul 1. Valorile greutatei specifice, densității și tensiunii superficiale la presiunea atmosferică și temperatura de 20 °C .

Temperatura (°C)	Greutatea specifică (N/m ³)	Densitatea (kg/m ³)
0	12,68	1,293
5	12,46	1,270
10	12,24	1,247
15	12,02	1,226
20	11,82	1,205
25	11,62	1,184
30	11,43	1,165
35	11,24	1,146
40	11,06	1,128
50	10,72	1,093
60	10,40	1,060
70	10,10	1,029
80	9,81	1,000
90	9,54	0,972
100	9,28	0,466

Tabelul 2. Valorile greutatei specifice și densității aerului la presiunea atmosferică.

Temperatura T (°C)	Greutatea specifică γ (N/m ³)	Densitatea ρ (kg/m ³)	Viscozitatea dinamică $\mu \cdot 10^3$ (N · s/m ²)	Viscozitatea cinematică $\nu \cdot 10^6$ (m ² /s)	Tensiunea superficială $\sigma \cdot 10^2$ (N/m)	Presiunea vaporilor p_v (kN/m ²)	Coeficientul de compresibilitate $\varepsilon \cdot 10^{-9}$ (N/m ²)
0	9 805	999,8	1,794	1,794	7,62	0,61	2,02
5	9 806	1000,0	1,519	1,519	7,54	0,87	2,06
10	9 802	999,7	1,308	1,308	7,48	1,23	2,11
15	9 797	999,1	1,140	1,141	7,41	1,70	2,14
20	9 786	998,2	1,005	1,007	7,36	2,34	2,20
25	9 777	997,1	0,894	0,897	7,26	3,17	2,22
30	9 762	995,7	0,801	0,804	7,18	4,24	2,23
35	9 747	994,1	0,723	0,727	7,10	5,61	2,24
40	9 730	992,2	0,656	0,661	7,01	7,38	2,27
45	9 711	990,2	0,599	0,605	6,92	9,55	2,29
50	9 689	988,1	0,549	0,556	6,82	12,33	2,30
55	9 665	985,7	0,506	0,513	6,74	15,78	2,31
60	9 642	983,2	0,469	0,477	6,68	19,92	2,28
65	9 616	980,6	0,436	0,444	6,58	25,02	2,26
70	9 588	977,8	0,406	0,415	6,50	31,16	2,25
75	9 560	974,9	0,380	0,390	6,40	38,57	2,23
80	9 528	971,8	0,357	0,367	6,30	47,34	2,21
85	9 497	968,6	0,336	0,347	6,20	57,83	2,17
90	9 473	965,3	0,317	0,328	6,12	70,10	2,16
95	9 431	961,9	0,299	0,311	6,02	84,36	2,11
100	9 398	958,4	0,284	0,296	5,94	101,33	2,07

Tabel 3. Proprietățile apei la presiunea atmosferică.

ANEXA 2

Ecuatiile de mișcare Navier-Stokes și ecuația de continuitate în coordonate cilindrice

Ecuatiile de mișcare Navier- Stokes sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\ = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Ecuatia continuității se scrie,

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0 .$$

BIBLIOGRAFIE

- 1) **Anton V., Popovici M., Fitero I.**, *Hidraulică și mașini hidraulice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
- 2) **Brădeanu P.**, *Mecanica fluidelor*, Editura Tehnică, 1973.
- 3) **Brun E. A., Martinot-Lagarge A., Mathieu J.**, *Mécanique des fluides*, Ed. Dunot, Paris, 1960.
- 4) **Carafoli E., Constantinescu V. N.**, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Editura Academiei, București, 1981.
- 5) **Cebecci T., Smith A. M. O.**, *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1974.
- 6) **Comolet R.**, *Mécanique expérimentale des fluides*, Ed. Masson, Paris/Milan/Barcelon/Bonn, 1990.
- 7) **Constantinescu V. N.**, *Dinamica fluidelor vâscoase în regim laminar*, Editura Academiei Române, 1987.
- 8) **Dragoș L.**, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Editura Tehnică, 1981.
- 9) **Florea J., Zidaru Gh.**, *Bazele hidraulicii – culegere de probleme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969.
- 10) **Florea J., Seteanu I., Zidaru Gh., Panaitescu V.**, *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice - probleme*, Editura Didactică și Pedagogică, 1982.
- 11) **Florea J., Panaitescu V.**, *Mecanica fluidelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- 12) **Germain P.**, *Mécanique des milieux continus*, Ed. Masson, Paris, 1973.
- 13) **Gheorghită Șt. I.**, *Teoria stratului limită și turbulență*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1973.
- 14) **Hinze J. O.**, *Turbulence*, Ed. McGraw-Hill Book Company, 1975.
- 15) **Iacob C.**, *Mecanică teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.

- 16) **Iamandi C., Petrescu V., Sandu L., Damian R., Anton A., Degeratu M.**, *Hidraulica instalațiilor, Elemente de calcul și aplicații*, Editura Tehnică, 1985.
- 17) **Iamandi C., Petrescu V., Damian R., Sandu L., Anton A.**, *Hidraulica instalațiilor, vol. II*, Editura Tehnică, 2002.
- 18) **Ionescu D. Gh., Matei P., Ancușa V., Todicescu A., Buculei M.**, *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*. Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
- 19) **Isbășoiu E.C., Georgescu S. C.**, *Mecanica Fluidelor*, Editura Tehnică, București, 1995.
- 20) **Landau L., Lifchitz E.**, *Physique théorique, Mécanique des fluides, vol VI*, Editions MIR, Moscou, 1989.
- 21) **Marinescu Al.**, *Metode, aparate și instalații de măsură în aeromecanică*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1970.
- 22) **Mateescu C.**, *Hidraulica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
- 23) **Matei P.**, *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice*, Lito. Institutul Politehnic Iași, 1979.
- 24) **Oroveanu T.**, *Mecanica fluidelor vâscoase*, Editura Academiei, București, 1967.
- 25) **Panaiteescu V., Tcacenco V.**, *Bazele mecanicii fluidelor*, Editura Tehnică, București, 2001.
- 26) **Popa O.**, *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*, Rotaprint, Timișoara, 1976.
- 27) **Prasuhn A.**, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- 28) **Reynolds A. J.**, *Curgeri turbulente în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
- 29) **Roberson J., Crowe C.**, *Engineering Fluid Mechanics*, Ed. Houghton Mifflin Company, Boston, 1975.
- 30) **Seteanu I., Rădulescu V., Vasiliu N., Vasiliu D.**, *Mecanica fluidelor și sisteme hidraulice, vol I*, Editura Tehnică, București, 1999.
- 31) **Streeter V.**, *Fluid Mechanics*, Ed. Mc-Graw-Hill Book Company, Inc. 1962.
- 32) **STAS 9488-74**, *Mecanica fluidelor. Terminologie, simboluri, unități de măsură*.
- 33) **STAS 3061-74**, *Hidraulica. Terminologie, simboluri, unități de măsură*.
- 34) **STAS 1647-85**, *Căldură. Terminologie și simboluri*.